Résumé micro (production)

Pier-André Bouchard St-Amant*

1 Technologie de production

Définition 1. *(Output) L'output (y) est un vecteur désignant ce qui est produit par la firme.*

Définition 2. *(Input) L'input (x) est un vecteur de biens désignant ce qui est nécessaire pour produire l'output de la firme.*

Ces deux éléments ne sont pas nécessairement mutuellement exclusifs (un input peut être un output et vice-versa).

Définition 3. *(Plan de production) Un plan de production est un vecteur $z \in \mathbb{R}^n$ d'input et d'output d'une firme tel que $z_i \leq 0$ si z_i désigne un input et $z_i \geq 0$ si c'est un output. Par convention, $z_1, \ldots, z_k$ désigne l'output.*

Définition 4. *(Ensemble de production). Un ensemble de production est un sous-ensemble de $Z \subset \mathbb{R}^n$ qui caractérise les plans de productions réalisables par une firme.*

Définition 5. *(Isoquante) $Q(y) := \{x \in \mathbb{R}^{n-k} : z \in Z, [z_1, \ldots, z_k]' = y\}$*

Définition 6. *(fonction de production) $y := f(x) : f(x) = \max_{(y,-x)\in Z} y$*

Définition 7. *(Taux marginal de substitution technique) Supposons que nous avons les conditions (lesquelles ?) pour que les isoquantes soient des courbes représentables par $y = f(x)$ où f est continue différentiable. Alors le taux marginal de substitution technique entre x_i et x_j est défini par*

$$TMST_{x_i,x_j} := \left|\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right| = \frac{\partial f}{\partial x_j} / \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

*bouchard@lse.ac.uk. Visiblement, il y a encore des correctifs à apporter à ces notes. Notamment, la cohérence de la dimension de l'output à travers les notes et quelques propositions sont mal écrites.

1.1 Axiomes sur l'ensemble de production

1. Z est fermé et n'est pas l'ensemble vide ($\neq \emptyset$). Si c'est l'ensemble vide, la firme ne produit rien et ne demande rien, peu importe ce qui se passe (pas très intéressant). Si ce n'est pas un ensemble fermé, il est possible que la firme n'ait pas de fonction de production (le maximum peut ne pas exister si l'ensemble n'est pas fermé).
2. $0 \in Z$. Il est possible pour la firme de ne pas produire.
3. $z \in Z, z' \leq z \Rightarrow z \in Z$. Une technologie moins efficace est aussi dans l'ensemble des plans de production.
4. $z \in Z, z \geq 0 \Rightarrow z = 0$. No free lunch :-).
5. Rendements à l'échelle :
   (a) (décroissants : $z \in Z, \alpha \in [0,1] \Rightarrow \alpha z \in Z$) On peut réduire l'échelle de production.
   (b) (croissants : $z \in Z, \alpha \geq 1 \Rightarrow \alpha z \in Z$) On peut augmenter l'échelle de production de la firme.
   (c) (constants : $z \in Z, \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha z \in Z$) On peut augmenter ou réduire le plan de production de la firme.
6. ($z, z' \in Z \Rightarrow z + z' \in Z$) Propriété d'additivité.
7. (Z est convexe).
8. (Les inputs sont différents de l'output). Propriété de séparabilité.

Les axiomes entre parenthèses sont plutôt des propriétés qui sont présentes ou non selon le type de firmes.

1.2 Propriétés de la fonction de production

Proposition 1. *Une fonction de production a des :*

1. *RE Constants* $\Rightarrow f(tx) \geq tf(x) \forall t \geq 0$.
2. *RE Décroissants* $\Rightarrow f(tx) \leq tf(x) \forall t \in [0,1]$.
3. *RE Croissants* $\Rightarrow f(tx) \geq tf(x) \forall t \geq 1$.

Démonstration. 1. soit $z := (y, -x) \in Z$ et $\alpha \geq 0$. Nous avons alors que $(\alpha y, -\alpha x) \in Z$ par la propriété de RE constants. Puisque Z est fermé et non-vide, nous avons que $(f(x), -x)$ est bien défini. En conséquence, la propriété de RE constants est vraie pour $(f(x), -x)$ et donc $(\alpha f(x), -\alpha x) \in Z$. Il s'en suit alors que $(y, -\alpha x) \in Z \ \forall y \leq \alpha f(x)$ fait partie des inputs accessibles et que $(f(\alpha x), -\alpha x)$ est bien défini. Puisque $f(\alpha x) = \max_{(y,-x)\in Z} y$, on en déduit que $f(\alpha x) \geq \alpha f(x)$.

2. La démonstration est analogue au premier item, en modifiant les hypothèses.

3. La démonstration est analogue au premier item, en modifiant les hypothèses. □

Proposition 2. *Z a des RE constants si et seulement si $f(x)$ est homogène de degré un.*

Démonstration. (si) $z \in Z, \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha z \in Z$ et en particulier pour $z = (f(x), -x)$. Puisque $(f(\alpha x), -\alpha x)$ est le maximum, nous avons que $f(\alpha x) \geq \alpha f(x)$. Maintenant, pour α^{-1}, nous avons que $f(\alpha^{-1}\alpha x) \geq \alpha^{-1} f(\alpha x) \Rightarrow \alpha f(x) \geq f(\alpha x)$. En combinant les deux inégalités, nous devons conclure que $\alpha f(x) = f(\alpha x)$.

(seulement si) Soit $(y, -x) \in Z$, il nous faut montrer que $\alpha z \in Z\ \forall \alpha \geq 0$. Par hypothèse, $(f(x), -x) \in Z$. Par l'homogénéité de f, nous avons que $\alpha(f(x), -x) \in Z\ \forall \alpha \geq 0$. Par l'axiome trois, nous avons alors que $(w, -\alpha x) \in Z\ \forall w \leq \alpha f(x))$. Il s'en suit que $(ty, -tx) \in Z$. □

Proposition 3. *Si $f(x)$ est homogène de degré $\alpha < 1 (\alpha > 1)$, alors Z a des RE décroissants (croissants).*

Démonstration. Similaire au "seulement si" de la proposition précédente. □

Proposition 4. *Si Z est additif, alors $f(x^1 + x^2) \geq f(x^1) + f(x^2)$.*

Démonstration. Découle trivialement de la définition de f. □

Proposition 5. *Si Z est convexe, alors $f(x)$ est concave.*

Démonstration. Il faut montrer que si $\{z := (y, x), z' := (y', x'), \alpha z + (1-\alpha)z'\} \subset Z \Rightarrow f(\alpha x + (1-\alpha)x') \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x')$. Par définition, nous avons que $f(\alpha x + (1-\alpha)x') = \max_{(y, -\alpha x - (1-\alpha)x') \in Z} y$. Il s'en suit que $f(\alpha x + (1-\alpha)x')) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x')$. □

1.3 Problème de la firme

Définition 8. *(Production marginale de x_i)*

$$Pm_{x_i} := \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

Définition 9. *(Production moyenne de x_i)*

$$PM_{x_i} := \frac{f(x)}{x_i}$$

Définition 10. *(Frontière des possibilités de production) Si Z est séparable $z = (y, -x), y \in \mathbb{R}^k_+, x \in \mathbb{R}^{n-k}_+$, alors :*

$$PPF_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^k_+ : (y, -x) \in Z, [y' \geq y, (y', -x) \in Z \Rightarrow y' = y] \right\}$$

Définition 11. *(Taux marginal de transformation) En supposant que PPF_x est une surface différentiable, le taux marginal de transformation est alors :*

$$TMT_{y_i,y_j} := \left.\frac{\partial y_i}{\partial y_j}\right|_{PPF_x}$$

Définition 12. *(Firme négligeable) Une firme est négligeable si elle prend les prix du marché pour acquis (fixe).*

Définition 13. *(Problème de maximisation de la firme) La firme a pour objectif de maximiser les profits. Étant donné une firme négligeable et un vecteur de prix $q = [\underbrace{p_1, \ldots, p_k}_{=:p_y}, \underbrace{w_1, \cdots, w_{n-k}}_{=:w}]'$ elle cherche à maximiser $q \cdot z$ sujet à la contrainte $z \in Z$. En d'autres termes, elle cherche à maximiser $p_y \cdot f(x) - w \cdot x$*

Il existe au moins une solution à ce problème (voir les notes sur la théorie du consommateur pour une preuve analogue). À partir de ce stade, nous supposons que la solution est unique.

Définition 14. *(Demande non-conditionelle de facteurs, offre et profits purs) La solution au problème de maximisation de la firme est notée $x(p_y, w)$ et se dit la demande non-coditionelle de facteurs. L'offre de la firme est $y(p_y, w) := f(x(p_y, w))$. Les profits de la firme sont $\pi(p_y, w) := p_y y(p_y, w) - w \cdot x(p_y, w)$.*

1.4 Propriétés de l'offre de la firme, de la demande non-conditionelle et des profits.

Ici, nous supposons que $k = 1$ (la firme ne produit qu'un seul bien) et la séparabilité.

Proposition 6. *L'offre de la firme possède les propriétés suivantes :*

1. *$y(p_y, w)$ est non-décroissante en p_y.*
2. *$y(p_y, w)$ est homogène de degré zéro en (p_y, w).*

Démonstration. 1. Soit p_y et p'_y. Nous avons alors par définition que :

$$\begin{aligned}
p_y y(p'_y, w) - w \cdot x(p'_y, w) &\leq p_y y(p_y, w) - w \cdot x(p_y, w) \\
p'_y y(p_y, w) - w \cdot x(p_y, w) &\leq p'_y y(p'_y, w) - w \cdot x(p'_y, w) \\
\Rightarrow p_y y(p'_y, w) + p'_y y(p_y, w) &\leq p_y y(p_y, w) + p'_y y(p'_y, w) \\
&\Rightarrow 0 \leq (p_y - p'_y) y(p_y, w) - (p_y - p'_y) y(p'_y, w) \\
&\Rightarrow 0 \leq (p_y - p'_y)(y(p_y, w) - y(p'_y, w))
\end{aligned}$$

Ce qui implique que y est non-décroissant en p_y.

2. Ceci est vrai si $x(p_y, w)$ est homogène de degré zéro car $f(x(tp_y, tw)) = f(x(p_y, w))$. L'homogénéité de x sera prouvée ci-dessous.

$\square$

Proposition 7. *La demande non-conditionnelle de la firme possède les propriétés suivantes :*

1. $x_i(p_y, w)$ *est non-croissante en* w_i.
2. $x(p_y, w)$ *est homogène de degré zéro en* (p_y, w).

Démonstration. 1. Soit $w := [w_{k+1}, \ldots, w_i, \ldots, w_n]'$ et $w_b := [w_{k+1}, \ldots, w_{bi}, \ldots, w_n]'$. Nous avons alors par définition que :

$$\begin{aligned}
p_y y(p_y, w) - w_b \cdot x(p_y, w) &\leq p_y y(p_y, w) - w \cdot x(p_y, w) \\
p_y y(p_y, w_b) - w \cdot x(p_y, w_b) &\leq p_y y(p_y, w_b) - w_b \cdot x(p_y, w_b) \\
\Rightarrow w_b \cdot x(p_y, w) + w \cdot x(p_y, w_b) &\geq w \cdot x(p_y, w) + w_b \cdot x(p_y, w_b) \\
&\Rightarrow 0 \geq (w - w_b) \cdot x(p_y, w) - (w - w_b) \cdot x(p_y, w_b) \\
&\Rightarrow 0 \geq (w - w_b) \cdot (x(p_y, w) - x(p_y, w_b)) \\
&\Rightarrow 0 \geq (w_i - w_{bi})(x_i(p_y, w) - x_i(p_y, w_b))
\end{aligned}$$

Ce qui implique le résultat.

2. L'ensemble $\{x : \max p_y f(x) - w \cdot x\}$ est identique à $\{x : \max t p_y f(x) - tw \cdot x\} = \{x : t \max p_y f(x) - w \cdot x\}$ car c'est une transformation monotone de la fonction objective.

$\square$

Proposition 8. *Les profits de la firme possèdent les propriétés suivantes :*

1. $\pi(p_y, w)$ *est convexe en* (p_y, w).
2. $\pi(p_y, w)$ *est non-décroissante en* p_y *et non croissante en* w_i.
3. $\pi(p_y, w)$ *est homogène de degré un en* (p_y, w).
4. *Si* Z *est compact, alors* $\pi(p_y, w)$ *est continu en* (p_y, w).
5. *(Lemme d'Hotelling) :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi(p_y, w)}{\partial p_y} &= y(p_y, w) \\
\frac{\partial \pi(p_y, w_i)}{\partial w_i} &= -x_i(p_y, w) \ \forall i
\end{aligned}$$

6. *Si $y(p_y, w)$ et $x(p_y, w)$ sont continue différentiables, nous avons alors*

$$\frac{\partial y}{\partial p_y} \geq 0$$
$$\frac{\partial x_j}{\partial w_j} \leq 0$$
$$\frac{\partial x_j}{\partial w_i} = \frac{\partial x_i}{\partial w_j}$$

7. *La matrice*

$$S := \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial w_{n-k}} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial p} & -\frac{\partial x_1}{\partial w_1} & \cdots & -\frac{\partial x_1}{\partial w_{n-k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial x_{n-k}}{\partial p} & -\frac{\partial x_{n-k}}{\partial w_1} & \cdots & -\frac{\partial x_{n-k}}{\partial w_{n-k}} \end{bmatrix}$$

est positive semi-définie et symétrique.

8. *Si Z a des RE croissants (constants), alors les profits sont nuls (indéfinis).*

Démonstration. 1. Il faut montrer que $\alpha\pi(p_y, w) + (1-\alpha)\pi(p'_y, w_b) \geq \pi(\underbrace{\alpha(p_y, w) + (1-\alpha)(p'_y, w_b)}_{=:(p''_y, w_c)}), \alpha \in [0, 1]$. Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned} \pi(p_y, w) &\geq p_y y((p''_y, w_c)) - w \cdot x((p''_y, w_c)) \\ \pi(p'_y, w_b) &\geq p'_y y((p''_y, w_c)) - w' \cdot x((p''_y, w_c)) \\ &\Rightarrow \alpha\pi(p_y, w) + (1-\alpha)\pi(p'_y, w_b) \geq \alpha \left[p_y y((p''_y, w_c)) - w \cdot x((p''_y, w_c))\right] \\ &\qquad + (1-\alpha)\left[p'_y y((p''_y, w_c)) - w' \cdot x((p''_y, w_c))\right] \\ &\Rightarrow \alpha\pi(p_y, w) + (1-\alpha)\pi(p'_y, w_b) \geq \pi(p''_y, w_c) \end{aligned}$$

2. L'argument découle directement du théorème de l'enveloppe.
3. L'argument est similaire à celui de l'item deux de la proposition sept.
4. Soit $(p_{yn}, w_n) \to (p_y, w)$. Il faut montrer que $\pi(p_{yn}, w_n) \to \pi(p_y, w)$. Puisque Z est compact, il existe un maximum sur les inputs (disons α) et un maximum sur les outputs (disons $\tau = [\beta, \ldots, \beta]'$). Il s'en suit alors que pour tout $(y, -x) \in Z$, nous avons que $(p_{yn} - p)y - (w_n - w) \cdot x \leq |p_{yn} - p|y + |w_n - w| \cdot x \to 0$. En conséquence, $\pi(p_{yn}, w_n) - (p_y y(p_{yn}, w_n) - w \cdot x(p_{yn}, w_n)$ est borné par quelque chose qui tend vers zéro. Il s'en suit alors que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un certain n_0 tel que

$$\pi(p_{yn}, w_n) < p_y y(p_{yn}, w_n) - w \cdot x(p_{yn}, w_n) + \epsilon \ \forall n > n_0$$

De plus, par définition, nous savons que $p_y y(p_{yn}, w_n) - w \cdot x(p_{yn}, w_n) + \epsilon \leq \pi(p_y, w) + \epsilon$ et il s'en suit que

$$\pi(p_{yn}, w_n) < \pi(p_y, w) + \epsilon \ \forall n > n_0$$

Par un argument analogue, nous pouvons déduire qu'il existe un certain n_1 tel que pour tout $n > n_2$, nous avons

$$\pi(p_y, w) - (p_{yn} y(p_y, w) - w_n x(p_y, w)) < \epsilon$$

Puisque $\pi(p_{yn}, w_n) \geq p_{yn} y(p_y, w) - w_n x(p_y, w)$, nous avons alors

$$\pi(p_{yn}, w_n) \geq \pi(p_y, w) - \epsilon \ \forall n > n_1$$

En prenant $n_2 = \max(n_0, n_1)$, nous avons que les deux inégalités tiennent et en les combinants, nous avons

$$\pi(p_y, w) - \epsilon \leq \ \pi(p_{yn}, w_n) \leq \pi(p_y, w) + \epsilon$$

Ce qui nous donne le résultat voulu.

5. Découle directement du théorème de l'enveloppe.
6. Les deux premiers résultats découlent de la convexité de π et de l'item précédent. Le dernier résultat découle directement de la symétrie des dérivées mixtes (Young) et de la proposition précédente.
7. Nous savons que la fonction π est convexe, il s'en suit que sa matrice hessienne doit être positive semi-définie (Taylor de deuxième ordre).
8. Si les rendements d'échelles sont constants, nous avons alors que $\pi(tp_y, tw) = t\pi(p_y, w)$. Si les profits sont nuls, nous avons $0 = 0$. Si les profits sont non nuls, nous avons un niveau arbitraire de profits en fixant t de manière arbitraire.

□

1.5 Problème de minimisation des coûts

Définition 15. *(Problème de minimisation) Étant donné une firme négligeable et un niveau de production $f(x) \geq \bar{y}$. Le problème de minimisation des coûts de la firme est $w \cdot x$ sujet à la contrainte $f(x) \geq \bar{y}$.*

Définition 16. *(Demandes conditionnelles et fonction de coût) Les demandes conditionnelles de facteurs est la solution au problème précédent et se note $x(w, \bar{y})$. Le fonction de coût est $c(w, \bar{y}) := w \cdot x(w, \bar{y})$.*

1.6 Propriétés de la fonction de coût et des demandes conditionnelles

Proposition 9. *La fonction de coûts à les propriétés suivantes :*

1. $c(w, \bar{y})$ *est non-décroissante en* w_i.
2. $c(w, \bar{y})$ *est homogène de degré 1 en* w.
3. $c(w, \bar{y})$ *est concave en* w.
4. $c(w, \bar{y})$ *est continue en* w.
5. $c(w, \bar{y})$ *est non-décroissante en* $\bar{y}$.
6. *(Lemme de Sheppard) :*
$$\frac{\partial c(w, y)}{\partial w_i} = x_i(w, y) \ \forall i$$
7. *Si* $f(x)$ *concave, alors* $c(w, \bar{y})$ *est convexe en* $\bar{y}$.

Démonstration.

1. Découle de l'item 6 ci-dessous et du fait que $x_i(w, y)$ est positif ou nul.
2. Nous avons que la condition sur ensemble $\{x : \min_{f(x) \geq \bar{y}} w \cdot x\}$ est une transformation monotone de la condition sur l'ensemble $\{x : \min_{f(x) \geq \bar{y}} tw \cdot x\} = \{x : t \min_{f(x) \geq \bar{y}} w \cdot x\}$. Il s'en suit qu'un élément qui fait partie du premier fera également partie du second (et vice-versa).
3. Découle directement de l'item précédent ($c(\alpha w, y) = \alpha c(w, y)$).
4. Soit $w_n \to w$ et réécrivons $w_n := \alpha_n w$. À l'évidence, $\alpha_n \to 1$. Par l'homogénéité de degré un, nous avons que $c(w_n, \bar{y}) = \alpha_n c(w, \bar{y}) \to c(w, y)$.
5. Soit $\bar{y}_1 \geq \bar{y}_2$. Nous avons que l'ensemble $\{x : f(x) \geq \bar{y}_1\} \subseteq \{x : f(x) \geq \bar{y}_2\}$. Il s'en suit que le minimum sur le deuxième ensemble est plus petit ou égal au minimum du premier ensemble.
6. Découle directement du théorème de l'enveloppe.
7. Puisque f est concave, nous avons que $f(\alpha x(w, \bar{y}_1) + (1-\alpha) x(w, \bar{y}_2)) \geq \alpha \bar{y}_1 + (1-\alpha)\bar{y}_2$. Il s'en suit que le coût pour produire $\alpha \bar{y}_1 + (1-\alpha)\bar{y}_2$ n'est pas plus grand que $w \cdot (\alpha x(w, \bar{y}_1) + (1-\alpha) x(w, \bar{y}_2))$, ce qui implique que $c(w, \alpha \bar{y}_1 + (1-\alpha)\bar{y}_2) \leq \alpha c(w, \bar{y}_1) + (1-\alpha) c(w, \bar{y}_2)$.

□

Définition 17. *(Coût marginal et coût moyen) Le coût moyen est* $ac(w, y) := \frac{c(w,y)}{y}$ *et le coût marginal, en supposant* c *différentiable, est* $mc(w, y) := \frac{\partial c(w,y)}{\partial y}$.

Proposition 10. *La fonction de coûts marginal a les propriétés suivantes :*

1. *Si* $f(x)$ *a des RE constants, alors* $c(w, \bar{y}) = c(w, 1)\bar{y}$.

2. *Si $f(x)$ a des RE constants, alors $ac(w, \bar{y})$ est non-croissante en $\bar{y}$.*
3. *Si $f(x)$ a des RE croissants, alors $ac(w, \bar{y})$ est non croissant en $\bar{y}$.*
4. *Si $f(x)$ a des RE décroissants, alors $ac(w, \bar{y})$ est non-décroissant en $\bar{y}$.*
5. $\frac{\partial ac(w,\bar{y})}{\partial \bar{y}} \leq 0 \Leftrightarrow mc(w, \bar{y}) \leq ac(w, \bar{y})$.

Démonstration. 1. Dans un premier temps nous avons que $x(w, \bar{y}) = \bar{y}x(w, 1)$ (la preuve est similaire aux autres qui impliquent l'homogénéité de degré un). Nous avons alors que $c(w, \bar{y}) = w \cdot x(w, \bar{y}) = w \cdot x(w, 1)\bar{y} = c(w, 1)\bar{y}$.

2. De la précédente proposition, nous avons que $ac(w, \bar{y}) = c(w, 1)$, qui ne varie pas avec $\bar{y}$.
3. Nous avons que $f(\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}x(w, \bar{y}_2) \geq \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}f(x(w, \bar{y}_2) = \bar{y}_1$. Il s'en suit que $c(w, \bar{y}_1) \leq \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2}c(w, y)$ (et donc le résultat).
4. La preuve est analogue à l'item précédent, en inversant les inégalités.
5. Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial ac(w, \bar{y})}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \frac{c(w, y)}{y} &= \frac{mc(w, \bar{y})}{y} - ac(w, y)\frac{1}{y} \\ &= \frac{1}{y}\left[mc(w, \bar{y}) - ac(w, y)\right]\end{aligned}$$

□

Proposition 11. *Si $x(w, y)$ est continue différentiable, alors la matrice*

$$S := \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial w_{n-k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_{n-k}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial x_{n-k}}{\partial w_{n-k}} \end{bmatrix}$$

est symétrique et négative semi-définie.

Démonstration. Découle directement de la proposition 8 (item 7) en enlevant la première ligne, la première colonne et en multipliant par moins un. □