

Résumé micro

Pier-André Bouchard St-Amant*

1 Axiomes

1. $X = \mathbb{R}_+^n$, soit un continuum de n biens de consommation. Notez que \mathbb{R}_+^n est un ensemble convexe.
2. Il existe une relation d'ordre \succeq binaire de préférences des consommateurs. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}_+^n$ des paniers de consommation :
 - (a) complète : $a, b \in \mathbb{R}_+^n \Rightarrow a \succeq b, b \succeq a$ (ou les deux).
 - (b) transitive : $a \succeq b, b \succeq c \Rightarrow a \succeq c$.
 - (c) continue : $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$, les ensembles $C_x^+ := \{y \in \mathbb{R}_+^n : y \succeq x\}, C_x^- := \{y \in \mathbb{R}_+^n : y \preceq x\}$ sont des ensembles fermés.
 - (d) (monotonicité : $a_i > b_i \forall i \Rightarrow a \succ b$)
 - (e) (monotonicité forte : $a_i \geq b_i \forall i, a \neq b \Rightarrow a \succ b$)
 - (f) (convexité : $a, b, c \in \mathbb{R}_+^n, \lambda \in [0, 1], a \succeq c, b \succeq c \Rightarrow \lambda a + (1 - \lambda)b \succeq c$)
 - (g) (stricte convexité : $a, b, c \in \mathbb{R}_+^n, \lambda \in [0, 1], a \succeq c, b \succeq c \Rightarrow \lambda a + (1 - \lambda)b \succ c$)
3. Absence de satiation locale (ASL) : $\forall x \in \mathbb{R}_+^n, \delta > 0, \exists x_1 \in B(x, \delta) : x_1 \succ x$. Notez que ASL est une assomption plus faible que la monotonicité ou la monotonicité forte.

Les axiomes entres parenthèses (2d, 2f, 2g, 2e) sont parfois employées pour simplifier les preuves. Certains résultats dépendent de 3 et/ou des axiomes identifiés entre parenthèses. Ils sont alors identifiés explicitement au cours du texte.

2 Théorie du consommateur

2.1 Utilité et préférences :

Définition 1. (*préférence inverse*) $a, b \in \mathbb{R}_+^n, a \preceq b \Leftrightarrow b \succeq a$.

*bouchard@lse.ac.uk.

Définition 2. (*indifférence*) $a, b \in \mathbb{R}_+^n$, $a \sim b \Leftrightarrow b \succeq a, a \succeq b$.

Définition 3. (*stricte préférence, stricte préférence inverse*) *Similairement*, $a, b \in \mathbb{R}_+^n$, $a \prec b \Leftrightarrow b \succeq a, b \not\sim a$ ($a, b \in \mathbb{R}_+^n$, $a \succ b \Leftrightarrow a \succeq b, b \not\sim a$).

Proposition 1. *Étant donnée 1, 2a, 2b et 2c, soit $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{R}_+^n : x_n \succeq y_n \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n := x \succeq y =: \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.*

Démonstration. (Preuve par l'absurde) Supposons le contraire ($y \succ x$). Dans ce cas, $y \in C_x^+$ et $x \in C_y^-$. De plus pour un certain $n > n_0$, $x_n \in C_y^-$ et pour un certain $n > n_1$, $y_n \in C_x^+$ (sinon, les suites ne convergent pas). Considérons les suites à partir de $n_2 := \max(n_0, n_1)$ et l'ensemble $I = C_x^+ \cap C_y^-$.

Supposons que cet ensemble est vide. Dans ce cas, $\forall n > n_2, y_n \succeq x_n$ et nous avons une contradiction. Cet ensemble contient donc au moins un élément.

Sans perte de généralités, supposons que c'est un élément de la suite x_n (disons, x_i) Par un raisonnement analogue, nous avons que pour un certain $n > n_3$, $x_n \in C_{x_i}^-$ (sinon la suite ne converge pas). Mais alors, nous avons pour un certain $n > n_4$, $y_n \in C_{x_i}^+$ et pour $n_5 := \max(n_4, n_3)$, nous avons $y_n \succeq x_n$, établissant une autre contradiction. Il s'en suit que x_i ne peut pas être dans i .

Nous pouvons établir une contradiction symétrique si nous choisissons un point y_i dans l'ensemble i , ce qui complète la preuve. \square

Théorème 1. *Étant donné les axiomes 1, 2a, 2b et 2c, il existe une fonction dite "d'utilité" $u : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u(a) \geq u(b) \Leftrightarrow a \succeq b$.*

Démonstration. Pour éviter les considérations topologiques, nous supposons également 2d pour établir la preuve. Soit $x \in \mathbb{R}_+^n$ un panier de consommation. Définissons $i \in \mathbb{R}_+^n$, $i := [1, \dots, 1]'$ et définissons à nouveau $I = C_x^+ \cap C_x^-$. Cet ensemble est fermé puisque par hypothèse, les deux constituantes sont fermés. Notons que $0i \in C_x^-$. Notons également que $(\max(x_j) + \epsilon)i \in C_x^+$. Finalement, remarquons que $\lambda i \in C_x^- \cup C_x^+ \forall u \in \mathbb{R}_+$ puisque la relation est complète. Nous avons donc deux ensemble fermés non-vides qui couvrent entièrement $m := \{x : x = ui, u > 0\}$. Il s'en suit que $m \cap I \neq \emptyset$.

Maintenant, nous allons montrer que $m \cap I$ ne contient qu'un seul point. Supposons le contraire. Nous aurions donc $ui, u'i \in m \cap I$ et $ui \sim x \sim u'i$. Mais si $u \neq u'$, nous avons par l'axiome 2d que l'un des deux est préféré à l'autre, ce qui établit une contradiction. Nous devons donc déduire que $u = u'$ et le point est unique.

Il suffit alors de définir $u(x) := u$. Puisque le raisonnement tient pour n'importe quel x , nous avons défini le niveau d'utilité pour chaque bien de consommation. \square

Théorème 2. *Étant donnée les mêmes axiomes que le précédent théorème, la fonction u est continue.*

Démonstration. Nous procédons par l'absurde. Soit $x^n \rightarrow x$. Nous devons montrer que $u(x_n) \rightarrow u(x)$, ou dit en termes de la proposition précédente, $u_n i \rightarrow u i \Leftrightarrow u_n \rightarrow u$, entraîne une contradiction. Explicité en ces termes, la conclusion est alors triviale puisque $u_n i \sim x_n$ et $u_n i \in C_x^+ \Leftrightarrow x_n \in C_x^+$. Puisque ces ensembles sont fermés, il s'en suit que la limite de la suite (qui existe par construction) est bien dans un des ensemble et nous avons le résultat requis. \square

Définition 4. (Niveaux d'indifférences) Pour, $x \in \mathbb{R}_+^n$, $C_x := C_x^+ \cap C_x^-$.

Proposition 2. $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \not\sim y \Leftrightarrow C_x \cap C_y = \emptyset$. (Les niveaux d'indifférences ne peuvent se croiser).

Démonstration. La preuve est pratiquement triviale puisque nous l'avons employé implicitement dans la preuve du théorème 1. Soit x, y des paniers de consommation tels que $x \succ y$. Il faut montrer que $C_x \cap C_y = \emptyset$. Soit $x' \in C_x$. Puisque $x' \sim x \succ y$, $x' \notin C_y^-$. Il n'est donc pas dans C_y et il s'en suit que $C_x \cap C_y = \emptyset$. \square

Proposition 3. En supposant les axiomes 1, 2a, 2b, 2c et en supposant de plus l'ASL, nous avons que les niveaux d'indifférences sont des courbes.

La preuve est plutôt technique et requiert une connaissance de la topologie. L'idée est la suivante : il faut montrer que cet ensemble est connecté (intuitivement : on peut se rendre d'un endroit à l'autre en restant "dans" l'objet) et ensuite montrée qu'il peut être recouvert de boules ouvertes qui ne se recoupent que deux à deux. Seul des courbes ont cette propriété.

Définition 5. (Métrique euclidienne) $x, y \in \mathbb{R}_+^n : \|x - y\| := \sum_i (x_i - y_i)^2$

Définition 6. (Boule ouverte) $x \in \mathbb{R}_+^n, \delta \in \mathbb{R}_+, B(x, \delta) := \{y \in \mathbb{R}_+^n : \|x - y\| < \delta\}$

Définition 7. (Ensemble convexe) X est convexe si $x, y \in X, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in X$.

Définition 8. (Fonction quasi-concave) Une fonction u est quasi-concave si l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}_+^n : u(x) \geq k\}$ est convexe pour un niveau $k \in \mathbb{R}$ donné.

Définition 9. (Taux marginal de substitution : TMS) Si on suppose u différentiable, on a alors :

$$TMS_{x_i, x_j} := \left| \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right| = - \frac{\partial u}{\partial x_j} / \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

2.2 Problème primal du consommateur

Définition 10. (Ensemble budgétaire) p_i est défini comme le prix du bien i . p est donc le vecteur de prix. m est défini comme le revenu du consommateur. L'ensemble des paniers de consommations abordables est donc $B(p, m) := \{x \in \mathbb{R}_+^n : p \cdot x \leq m\}$. Si l'individu a un panier initial x^0 , le revenu du consommateur est alors implicitement défini par $m = p \cdot x^0$.

Définition 11. (Problème du consommateur) Le consommateur cherche $x^* := \max u(x)$ sujet à la contrainte $x^* \in B(p, m)$.

Théorème 3. Si $p_i > 0 \forall i$ et u est continue, alors le problème du consommateur admet au moins une solution.

Démonstration. L'ensemble $T := \mathbb{R}_+^n \cap B(p, m)$ est fermé et borné (compact). Puisque u est continue, il s'en suit que $u(T)$ est également fermé et borné. En conséquence, il admet (au moins) un maximum (et un minimum). \square

Définition 12. (correspondance Marshalliennes) $x(p, m) := \{x \in \mathbb{R}_+^n : x = \max_{x \in B(p, m)} u(x)\}$

Proposition 4. (Kuhn-Tucker) Si u est continue-différentiable, la solution au problème du consommateur est caractérisée par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla u(x^*) &\leq \lambda p \\ x^*[\nabla u(x^*) - \lambda p] &= 0 \\ p \cdot x^* &\leq m \\ \lambda[p \cdot x - m] &= 0 \end{aligned}$$

Démonstration. À faire. \square

Proposition 5. Si les préférences satisfont l'axiome d'ASL, alors $p \cdot x^* = m \forall x^* \in x(p, m)$ et pour une solution intérieure, $TMS_{x_i^*, x_j^*} = \frac{p_i}{p_j}$.

Démonstration. La première affirmation se démontre par l'absurde. Soit $x^* \in x(p, m)$ et $p \cdot x^* < m$. Il s'en suit qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $B(x^*, \delta) \cap B(p, m) = B(x^*, \delta)$. Par la propriété d'ASL, nous avons alors qu'il existe un $x' \in B(x^*, \delta) : x' \succ x^*$. Puisque $x' \in B(p, m)$ et $x' \succ x^*$, nous avons une contradiction (x^* n'est pas optimal). Il s'en suit que $p \cdot x^* = m$.

La démonstration de la seconde affirmation est triviale, en appliquant simplement les définitions adéquatement. \square

Définition 13. (Utilité indirecte) $x^* \in x(p, m), V(p, m) := u(x^*)$.

Définition 14. (Fonction homogène) Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est homogène de degré k si $f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème 4. (Théorème de l'enveloppe) Soit le problème de maximisation suivant :

$$L(x, a, \lambda) := \max_x f(x) + \lambda g(x, a)$$

admettant pour solution

$$L(a) = f(x(a)) + \lambda(a)g(x(a), a)$$

alors :

$$\frac{\partial L(a)}{\partial a} = \lambda(a) \frac{\partial g(x(a), a)}{\partial a}$$

Démonstration. Nous avons que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(a)}{\partial a} &= \frac{\partial f(x(a))}{\partial x} \frac{\partial x(a)}{\partial a} + \frac{\partial \lambda(a)}{\partial a} g(x(a), a) + \lambda(a) \left[\frac{\partial g(x(a), a)}{\partial x} \frac{\partial x(a)}{\partial a} + \frac{\partial g(x(a), a)}{\partial a} \right] \\ &= \underbrace{\left[\frac{\partial f(x(a))}{\partial x} + \lambda(a) \frac{\partial g(x(a), a)}{\partial x} \right]}_{=0} \frac{\partial x(a)}{\partial a} + \underbrace{\frac{\partial \lambda(a)}{\partial a}}_{=0} g(x(a), a) + \lambda(a) \frac{\partial g(x(a), a)}{\partial a} \\ &= \lambda(a) \frac{\partial g(x(a), a)}{\partial a} \end{aligned}$$

□

(seul l'effet direct des constantes est pris en considération)

Proposition 6. La fonction d'utilité indirecte possède les propriétés suivantes :

1. $V(p, m)$ n'est pas décroissante en m et non croissante en p_i .
2. Si $u(x)$ est continue en x , $V(p, m)$ est continue en (p, m) .
3. $V(p, m)$ est homogène de degré zéro en (p, m) .
4. $V(p, m)$ est quasi-convexe en p .

Démonstration. 1. Soit $m_1 > m_2$. Nous avons alors $B(p, m_2) \subset B(p, m_1)$. Séparons $B(p, m_2)$ en deux : $B(p, m_1)$ et $R := B(p, m_2) \setminus B(p, m_1)$. Ces deux ensembles sont fermés et admettent donc chacun (au moins) un maximum global. Il s'en suit que le maximum global de $B(p, m_2)$ est l'un de ces maximums (le plus grand des deux). En conséquence, la fonction d'utilité indirecte n'est pas décroissante.

L'analyse sur les prix se fait de manière analogue.

2. Nous avons que $V(p, m) = u(x(p, m))$. Si u est continue, il faut alors montrer que $x(p, m)$ est continue. Ce résultat sera montré plus bas.
3. L'ensemble $B(np, nm)$ est identique à l'ensemble $B(p, m)$ (un élément dans le premier est aussi un élément dans le second et vice-versa). En conséquence, le maximum sur ces ensembles est identique.

4. Il faut montrer que l'ensemble $T := \{p : V(p, m) \leq \bar{u}\}$ est convexe pour tout \bar{v}, m . Soit $p, p' \in T, \alpha \in [0, 1]$ et définissons $p'' := \alpha p + (1 - \alpha)p'$. Considérons $p'' \cdot x = \alpha p' \cdot x + (1 - \alpha)p \cdot x \leq m$. Ceci implique que $p' \cdot x \leq m$ et/ou $p \cdot x \leq m$, ce qui implique que $p'' \in B(p', m) \cup B(p, m)$. Or, par hypothèse, nous avons que $\max_{x \in B(p', m)} u(x) \leq \bar{u}$ et $\max_{x \in B(p, m)} u(x) \leq \bar{u}$, ce qui implique que $\max_{x \in B(p', m) \cup B(p, m)} u(x) \leq \bar{u}$ et donc que $p'' \in T$. □

Proposition 7. *La correspondance Marshallienne possède les propriétés suivantes :*

1. Si les préférences sont strictement convexes (2g), $x(p, m)$ n'a qu'un seul élément.
2. Si u est continue et $x(p, m)$ est unique, elle est alors continue en (p, m) .
3. $x(p, m)$ est homogène de degré zéro en (p, m)
4. (Identité de Roy) $x_i(p, m) = -\frac{\partial V}{\partial p_i} / \frac{\partial V}{\partial m}$
5. Si on suppose l'ASL, $x_j(p, m) + \sum_{i \neq j} p_i \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} = 0$. (Au moins une demande a une pente négative).

Démonstration. 1. Soit $x^1, x^2 \in x(p, m)$. Nous avons que $p \cdot x^1 \leq m$ et $p \cdot x^2 \leq m$ et il s'en suit que pour $\alpha \in [0, 1], p \cdot (\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) \leq \alpha m + (1 - \alpha)m = m$. Une combinaison linéaire de solutions fait donc partie de l'ensemble budgétaire. Or, pas la stricte convexité, nous savons que cette combinaison est préférée aux deux autres, ce qui est une contradiction (x^1, x^2 sont sensés être optimaux). Nous devons donc déduire que $x^1 = x^2$.

2. Soit une suite $(p_n, m_n) \rightarrow (p, m)$. Il faut montrer que $x(p_n, m_n) \rightarrow x(p, m)$. Puisque $x(p, m)$ est fini, nous avons que pour un certain $n > n_0$, la suite (p_n, m_n) est dans un espace compact. Maintenant, supposons que $x(p_n, m_n) \not\rightarrow x(p, m)$ et dérivons une contradiction.

Puisque nous sommes dans un espace compact (fermé et borné), il existe un sous-suite (p_{nk}, m_{nk}) telle que $x(p_{nk}, m_{nk}) \rightarrow \hat{x}(p', m') \notin B(x(p, m), \delta)$, pour un certain $\delta > 0$ (Bolzano-Weirstrass). Par construction, nous avons que $p \cdot \hat{x} \leq m$. Puisque ce dernier n'est pas optimal en (p, m) , il existe un panier y tel que $u(y) > u(\hat{x})$. Dans ce cas, pour nk suffisamment large, nous avons que $p_{nk} \cdot m < m_{nk}$ et $u(y) > u(x(p_{nk}, m_{nk}))$ ce qui établit que $u(x(p_{nk}, m_{nk}))$ n'est pas optimal pour la sous-suite, ce qui est une contradiction.

3. La preuve est similaire à la proposition précédente pour $V(p, m)$.

4. Nous avons que :

$$\begin{aligned}
 V(p, m) &= u(x(p, m)) + \lambda(p, m)[m - p \cdot x(p, m)] \\
 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial p_i} &= \lambda(p, m)x_i(p, m) && \text{(Th. de l'Env.)} \\
 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial m} &= \lambda(p, m) && \text{(Th. de l'Env.)} \\
 \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial p_i} / \frac{\partial V}{\partial m} &= x_i(p, m) && \text{(Th. des fns implicites)}
 \end{aligned}$$

5. Puisque nous avons l'ASL, nous avons que $p \cdot x^* = \sum_i p_i x_i^* = m$. Nous pouvons alors déduire que :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial m}{\partial p_j} &= \frac{\partial}{\partial p_j} \sum_i p_i x_i^*(p, m) \\
 &= x_j^*(p, m) + \sum_{i \neq j} p_i \frac{\partial x_i^*(p, m)}{\partial p_j}
 \end{aligned}$$

□

À noter que la l'unicité des solutions $x(p, m)$ n'est pas nécessaire pour établir la continuité. Établir la continuité d'une correspondance (et non une fonction) nécessite toutefois la notion d'hémi-continuité.

Définition 15. (Courbe d'Engel) Soit, p un vecteur de prix fixe. La courbe d'Engel d'un bien $x_i \in x^*$ est le lieu des points $E_m := \{c \in (x_i(p, m), m)\}$.

Définition 16. (Biens normal, neutre, inférieur, de luxe, nécessaire) Soit x_i une composante d'un panier de x^* .

1. Un bien est dit normal si $\frac{\partial x_i}{\partial m} > 0$.
2. Un bien est dit neutre si $\frac{\partial x_i}{\partial m} = 0$.
3. Un bien est dit inférieur si $\frac{\partial x_i}{\partial m} < 0$.
4. Un bien est dit de luxe s'il est normal et si sa courbe d'Engel est convexe.
5. Un bien est dit nécessaire s'il est normal et si sa courbe d'Engel est concave.

2.3 Problème dual du consommateur

Définition 17. (*Problème de minimisation*) Soit $\bar{u} \in \mathbb{R}$ un certain niveau d'utilité. Le problème de minimisation du consommateur est alors $\min p \cdot x$ sous contrainte que $u(x) \geq \bar{u}$.

Définition 18. (*Correspondance Hicksienne*) $h(p, \bar{u}) := \{h^* \in \mathbb{R}_+^n : \min_{u(x) \geq \bar{u}} p \cdot h^*\}$

Définition 19. (*Fonction de dépense*) $e(p, \bar{u}) := p \cdot h^* \quad \forall h^* \in h(p, \bar{u})$

Proposition 8. *Supposons que u est continue. La fonction de dépense a alors les propriétés suivantes :*

1. $e(p, \bar{u})$ est continue en p et en \bar{u} .
2. $e(p, \bar{u})$ est strictement croissante en \bar{u} et non décroissante en p_i .
3. $e(p, \bar{u})$ est homogène de degré un en p .
4. $e(p, \bar{u})$ est concave en p .

Démonstration. 1. (La preuve est la même que pour la continuité des demandes marshalliennes). Soit $(p_n, \bar{u}_n) \rightarrow (p, \bar{u})$. Il faut montrer que $e(p_n, \bar{u}_n) \rightarrow e(p, \bar{u})$. Supposons le contraire et dérivons une contradiction. Nous pouvons supposer que pour $n > n_0$, la suite est comprise dans un espace compact. Si tel est le cas, il existe une sous-suite (p_{nk}, \bar{u}_{nk}) telle que $e(p_{nk}, \bar{u}_{nk}) \rightarrow \hat{e}(p, \bar{u})$. Puisque $\hat{e}(p, \bar{u})$ n'est pas minimale pour \bar{u} , nous avons qu'il existe un autre $h(p, \bar{u})$ tel que $p \cdot h(p, \bar{u}) < \hat{e}(p, \bar{u})$. En conséquence, pour n suffisamment large, nous avons que $\sum_i p_{nki} h(p_{nk}, \bar{u}_{nk}) < e(p_{nk}, \bar{u}_{nk})$, ce qui contredit l'optimalité de $e(p_{nk}, \bar{u}_{nk})$

2. Soit $\bar{u}_1 > \bar{u}_2$. Nous avons que l'ensemble $\{x : u(x) \geq \bar{u}_1\} \subseteq \{x : u(x) \geq \bar{u}_2\}$. Par un raisonnement analogue à la proposition 6.1, nous savons qu'elle n'est pas décroissante en \bar{u} . Il reste alors à montrer qu'elle n'est pas constante. Il est raisonnable de supposer l'axiome de monotonie forte (2e) dans ce cas. Ainsi, imaginons $e(p, \bar{u}_1) = e(p, \bar{u}_2)$. Par la continuité de u , il existe un $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\sum_i p \alpha h(p, \bar{u}_1) < e(p, \bar{u}_1)$ et tel que $u(\alpha h) = \bar{u}_2$, ce qui contredit le fait que $e(p, \bar{u}_1)$ est optimal.

Pour la non décroissance en p_i , le raisonnement est analogue à la proposition 6.1.

3. $e(tp, \bar{u}) = \sum_i t p_i h(tp, \bar{u}) = t \sum_i t h(p, \bar{u})$ si et seulement si h est homogène de degré zéro en p , ce qui sera prouvé ci-dessous.
4. Il faut montrer que

□

Proposition 9. *Supposons que u est continue. Alors les demandes hicksiennes h^* ont les propriétés suivantes :*

1. Si les préférences sont strictement convexes, $h(p, \bar{u})$ n'a qu'un seul élément.

2. $h(p, \bar{u})$ est homogène de degré zéro en p .

3. (Lemme de Sheppard)

$$\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(p, \bar{u})$$

4. Si chaque composante h_i est continue-différentiable, alors la matrice de substitution

$$S := \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial p_n} \end{bmatrix}$$

est définie semi-négative ($x'Sx \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$) et symétrique.

Démonstration. 1. Le raisonnement est analogue à la proposition 7.1.

2. Soit $t > 0$, les problèmes $\min_{u(x) > \bar{u}} \sum_i t p_i x_i = t \min_{u(x) > \bar{u}} \sum_i p_i x_i$ et $\min_{u(x) > \bar{u}} \sum_i p_i x_i$. Puisque le premier est simplement une transformation monotone croissante du second, nous avons que le maximum du premier sera également le maximum du second. Il s'en suit que la combinaison de h sera identique dans les deux cas.

3. Pour une fonction homogène f de degré zéro en x , nous avons que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Le résultat découle alors de l'item précédent :

$$\frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(p, \bar{u}) + p_i \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial p_i}}_{=0}$$

4. La matrice S n'est rien d'autre que le second terme d'une approximation de Taylor de la fonction e . Puisqu'elle est concave en p , il découle qu'elle est définie semi-négative. La symétrie est aussi une conséquence directe des dérivées mixtes :

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 e(p, \bar{u})}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 e(p, \bar{u})}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial h_j}{\partial p_i}$$

□

À partir d'ici, on suppose que les demandes hicksiennes sont uniques.

Proposition 10. Si $p_i > 0 \forall i$, u est continue et les préférences ont l'ASL, alors :

1. $x^* \in x(p, m), m > 0 \Rightarrow x^* \in h(p, u(x^*))$.
2. $h^* \in h(p, \bar{u}), \bar{u} > 0 \Rightarrow h^* \in x(p, e(p, \bar{u}))$.
3. $h^* \in h(p, \bar{u}) \Rightarrow u(x^*) = \bar{u}$.

- Démonstration.* 1. Soit x^* tel que $u(x^*)$ est un maximum. Considérons maintenant $\min_{u(x) \geq u(x^*)} p \cdot x$ et supposons que la solution est différente de x^* (disons x^2). À l'évidence, $p \cdot x^2 \leq m$ et procure au moins $u(x^*)$. Par la propriété de l'ASL, nous devons avoir que $p \cdot x^2 = m$ et $u(x^2) > u(x^*)$, ce qui est une contradiction. En conséquence, nous devons avoir $p \cdot x^2 = m$ et $u(x^2) = u(x^*)$.
2. (La preuve est similaire à 8.2). Soit h^* le panier qui minimise les coûts pour un niveau d'utilité donné. Nous savons par la propriété d'ASL que $p \cdot x = m := e(p, \bar{u})$. Il faut montrer qu'il n'existe aucun autre x tel que $u(x) > u(h^*)$. Supposons le contraire. Nous aurions alors un panier avec une plus grande utilité et par la continuité de u , il serait possible de trouver un $\alpha > 0$ et de réduire les coûts, ce qui contredit l'optimalité de h^* .
3. Découle directement du dernier item. □

Proposition 11. *Si $h(p, \bar{u})$ et $x(p, m)$ sont uniques et continue différentiable, on a alors de la proposition précédente :*

1. $V(p, e(p, \bar{u})) = \bar{u}$
2. $x_i(p, e(p, \bar{u})) = h_i(p, \bar{u}) \forall i$
3. $e(p, V(p, m)) = m$
4. $h_i(p, V(p, m)) = x_i(p, m) \forall i$

- Démonstration.* 1. $V(p, e(p, \bar{u})) = u(x^*)$. Cela découle alors de la proposition 10.3.
2. Découle de l'unicité et de la proposition 10.2 et 10.1 combinées.
3. Découle des items précédents.
4. Découle des items précédents. □

Théorème 5. *(Équation de Slutsky) Étant donnée les conditions de la proposition précédente, nous avons :*

$$\frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(p, v(p, m))}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} x_j(p, m)$$

Démonstration. Nous prenons le résultat en 11.2 et le dérivons par rapport à p_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i(p, e(p, \bar{u}))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, e(p, \bar{u}))}{\partial e} \frac{\partial e(p, \bar{u})}{\partial p_j} &= \frac{\partial h_i(p, \bar{u})}{\partial p_j} \\ \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} h_j(p, \bar{u}) &= \frac{\partial h_i(p, v(p, m))}{\partial p_j} \\ \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} x_j(p, m) &= \frac{\partial h_i(p, v(p, m))}{\partial p_j} \\ \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} &= \frac{\partial h_i(p, v(p, m))}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} x_j(p, m) \end{aligned}$$

□

Définition 20. Un bien est dit de Giffen si $\frac{\partial x_i}{\partial p_i} > 0$.

Corrolaire 1. (Bien de Giffen) Étant donné les conditions précédentes, il nous faut nécessairement $\frac{\partial x_i}{\partial m} > 0$ pour avoir un bien de Giffen.

Démonstration. Une simple analyse de l'équation de Slutsky suffit à établir le résultat. □

Définition 21. (Biens substitués nets, complémentaires nets, substitués bruts, compléments bruts) Soit h_i, h_j deux biens demandés.

1. Les deux biens sont dits substitués nets si $\frac{\partial h_j}{\partial p_i} \left(= \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \right) > 0$.
2. Les deux biens sont dits complémentaires nets si $\frac{\partial h_j}{\partial p_i} \left(= \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \right) < 0$.
3. Les deux biens sont dits substitués bruts si $\frac{\partial x_j}{\partial p_i} > 0$.
4. Les deux biens sont dits complémentaires bruts si $\frac{\partial x_j}{\partial p_i} < 0$.

2.4 Préférences révélées

Dans cette section nous supposons les axiomes 1, 2a, 2b, 2c et 3. Est-il possible de tester empiriquement ces hypothèses ?

Définition 22. (Révélation de préférence) Soit $p^1 \in \mathbb{R}_+^n, x^1 \in \mathbb{R}_+^n$ deux vecteurs de prix et de biens de consommation observés. Similairement, soit p^2, x^2 .

1. Si $p^1 \cdot x^2 \leq p^1 \cdot x^1$, alors le premier panier de consommation est révélé préféré au second ($x^1 \succeq_R x^2$).
2. Si $p^1 \cdot x^2 < p^1 \cdot x^1$, alors le premier panier de consommation est strictement révélé préféré au second ($x^1 \succ_R x^2$).

Définition 23. (*Axiome faible des préférences révélées : AfPR ou WARP en anglais*) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^n$. Si $a \succeq_R b$ et $a \neq b$, alors $b \not\succeq_R a$.

Un consommateur qui maximise sa consommation doit respecter l'AfPR, mais un consommateur qui respecte l'AfPR n'est pas nécessairement un agent maximisateur. C'est donc une condition nécessaire. Pour avoir une condition suffisante, il faut avoir des hypothèses plus fortes (incluant la transitivité).

Définition 24. (*Révélation indirecte*) On dit que x^i est indirectement révélé préféré à x^j ($x^i \succeq_{RI} x^j$) si $x^i \succeq_R x^a \succeq_R \dots \succeq_R x^z \succeq_R x^j$.

Définition 25. (*Axiome fort des préférences révélées : AFPR ou SARP en anglais*) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^n$. Si $a \succeq_{RI} b$ et $a \neq b$, alors $b \not\succeq_{RI} a$

Définition 26. (*Axiome général des préférences révélées : AGPR ou GARP en anglais*) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^n$. Si $a \succeq_{RI} b$ et $a \neq b$, alors $b \not\succeq_{RI} a$

Théorème 6. Si l'AFPR est respecté, il existe alors une fonction d'utilité $u(x)$ telles que x^i maximise u sujet à $x^i \in B(p^i, p^i \cdot x^i)$.

Démonstration. Voir la preuve constructive de fonction d'utilité au début de ce chapitre. □

Notez que si nous voulons des équations de demandes uniques, il nous faut GARP.

2.5 Analyse du bien-être

Différents critères de mesure du bien-être :

1. Si les prix passent de p^1 à p^2 , quelle variation de revenus donne le même niveau d'utilité que précédemment ? Mène à la définition de la variation compensée.
2. Si les prix étaient à p^1 à nouveau, quelle variation de revenus donnerait le même niveau d'utilité au consommateur qu'en p^2 ? Mène la définition de la variation équivalente.

Définition 27. (*Variations compensée*) Soit p^1 l'ensemble de prix originaux et p^2 le nouvel ensemble de prix. La variation compensée (CV) est définie par :

$$CV := e(p^1, \bar{u}^1) - e(p^2, \bar{u}^1)$$

De manière équivalente, elle est définie implicitement par :

$$V(p^1, m) = V(p^2, m - CV)$$

ou encore, par le lemme de Sheppard :

$$CV := \sum_i \int_{p_i^2}^{p_i^1} h_i(p, \bar{u}^1) dp_i$$

Définition 28. (*Variation équivalente*) Soit p^1 l'ensemble de prix originaux et p^2 le nouvel ensemble de prix. La variation équivalente (*EV*) est définie par :

$$EV := e(p^1, \bar{u}^2) - e(p^2, \bar{u}^2)$$

De manière équivalente, elle est définie implicitement par :

$$V(p^2, m) = V(p^1, m + EV)$$

ou encore, par le lemme de Sheppard :

$$EV := \sum_i \int_{p_i^2}^{p_i^1} h_i(p, \bar{u}^1) dp_i$$

Définition 29. (*Surplus du consommateur*) Soit p^1 l'ensemble de prix originaux et p^2 le nouvel ensemble de prix. Le surplus du consommateur pour le bien i est

$$CS := \int_{p_i^2}^{p_i^1} x_i(p, m) dp_i$$

Proposition 12. *Étant donné les définitions précédentes et une variation de prix d'un seul bien, nous avons les résultats suivants :*

1. Si le bien est normal, $CV < CS < EV$.
2. Si le bien est inférieur, $CV > CS > EV$.
3. Si le bien est neutre, $CV = CS = EV$.

Démonstration. À faire. □