

Design de mécanismes*

Pier-André Bouchard St-Amant

1 Définitions et axiomes

Définition 1 (Ensemble d'alternatives). X représente l'ensemble des alternatives possibles pour lequel un individu doit choisir.

Définition 2 (Type d'agents, profil de types et densité). $\theta_i \in \Theta_i$ représente la réalisation d'un type d'individu.

$\theta := (\theta_1, \dots, \theta_I) \in \Theta := \Theta_1 \times \dots \times \Theta_I$ est un profil de types parmi tous les types possibles.

$\phi(\cdot)$ est la densité de probabilité de θ .

Définition 3 (Agents). I est l'ensemble fini des individus. L'individu i a un type $\theta_i \in \Theta_i$, c'est-à-dire une réalisation particulière de tous ses types possibles. Il a une relation de préférences \succeq_i (θ_i) $\in \mathcal{R}_i := \{\succeq_i(\theta_i) : \theta_i \in \Theta_i\}$, ce qui génère une fonction d'utilité $u_i(x, \theta_i)$.

Définition 4 (Principal). L'agent $i := 0$ responsable de concevoir le mécanisme est appelé le principal. Il y a donc $I + 1$ agents au total : le principal et les autres agents.

1.1 Les axiomes

1. $\phi(\cdot)$, $\Theta_1, \dots, \Theta_I$ sont connus de tous.
2. Seul i observe θ_i (information incomplète).
3. $u_i(\cdot, \theta_i)$ est connu de tous (sauf θ_i).
4. Les individus maximisent leur utilité.

Définition 5 (Fonction de choix social). Une fonction de choix social $f : \Theta \rightarrow X$ qui, pour chaque profil de types θ , assigne un choix $x \in X$.

* "Mechanism Design"

Définition 6 (Fonction efficiente ex-ante). *Une fonction de choix social $f : \Theta \rightarrow X$ est efficiente ex-ante (ou paretienne) si pour un profil θ donné, il n'existe aucun autre $x \in X$ tel que $u_i(x, \theta_i) \geq u_i(f(\theta), \theta_i) \forall i$ et $\exists i : u_i(x, \theta_i) > u_i(f(\theta), \theta_i)$.*

Définition 7 (Stratégies permises). *L'ensemble des stratégies permise S_i représente l'ensemble des signaux permis pour l'individu i à l'intérieur d'un mécanisme.*

Définition 8 (Mécanisme). *Un mécanisme $\Gamma := (S_1, \dots, S_I, g(\cdot))$ est une collection de I ensembles de stratégies S_1, \dots, S_I et une fonction de résultats $g : S_1 \times \dots \times S_I \rightarrow X$.*

Définition 9 (Jeux induit). *Soit $\tilde{u}_i(s_1, \dots, s_I, \theta_i) := u_i(g(s_1, \dots, s_I), \theta_i)$. Le jeux induit par par $\Gamma, \Theta, \phi(\cdot)$ et u_i est le jeux en forme normale¹*

$$[I, \{S_i\}, \{\tilde{u}_i\}, \Theta, \phi(\cdot)]$$

Deux commentaires à ce stade. D'une part, on sait par le théorème de Kakutani qu'il existera une solution d'équilibre à ce jeu. D'autre part, cet équilibre ne dépend pas directement de la réalisation du type des personnes, mais de leur probabilité de réalisation et des stratégies possibles.

Définition 10 (Mécanisme implémentant un choix social). *Un mécanisme Γ implémente une fonction de choix social f s'il existe un profil de stratégies d'équilibre (s_1^*, \dots, s_I^*) émanant du jeux induit tel que $g(s_1^*, \dots, s_I^*) = f(\theta_1, \dots, \theta_I)$.*

Définition 11 (Mécanisme de révélation direct). *Un mécanisme Γ est dit direct si $S_i = \Theta_i \forall i$ et si $g(\theta) = f(\theta) \forall \theta \in \Theta$.*

Définition 12 (Fonction de choix social véridiquement implemantable²). *Une fonction de choix social est dite véridiquement implemantable (ou compatible aux incitatifs) si $s_i^* = \theta_i \forall \theta_i \in \Theta_i, i$ est un équilibre en stratégie dominante du mécanisme de révélation direct $\Gamma := \{\Theta_1, \dots, \Theta_I, f(\cdot)\}$.*

Définition 13 (Équilibre en stratégie dominante). *Le profil de stratégie (s_1^*, \dots, s_I^*) est dit un équilibre en stratégie dominante du mécanisme Γ si pout tout i et pour tout $\theta_i \in \Theta_i$*

$$u_i(g(s_i^*, s_{-i}), \theta_i) \geq u_i(g(s'_i, s_{-i}), \theta_i) \quad \forall s'_i, s_{-i}$$

Définition 14 (Équilibre bayésien). *Le profil de stratégie (s_1^*, \dots, s_I^*) est dit un équilibre bayésien du mécanisme Γ si pour tout i et pour tout $\theta_i \in \Theta_i$*

$$E [u_i(g(s_i^*, s_{-i}^*), \theta_i) | \theta_i] \geq E [u_i(g(s'_i, s_{-i}^*), \theta_i) | \theta_i] \quad \forall i, s'_i$$

Définition 15 (Mécanisme implémentant un choix social en équilibre bayésien). *Un mécanisme Γ implémente une fonction de choix social f en équilibre bayésien s'il existe un profil de stratégies d'équilibre s^* émanant du jeux induit tel que $g(s^*) = f(\theta) \forall \theta \in \Theta$.*

¹La forme extensive existe également.

²“Truthfully implementable”.

2 Principe de révélation

2.1 En stratégie dominante

Proposition 1 (Principe de révélation en équilibre dominant). *Soit Γ un mécanisme qui implémente une fonction de choix social f en stratégie dominante. Alors f est véridiquement implémentable en stratégie dominante.*

Démonstration. Si Γ implémente f en stratégie dominante, c'est qu'il existe un profil de stratégies s^* tel que $g(s^*) = f(\theta) \forall \theta$ et tel que pour tout i et pour tout $\theta_i \in \Theta_i$:

$$u_i(g(s_i^*, s_{-i}), \theta_i) \geq u_i(g(\hat{s}_i, s_{-i}), \theta_i)$$

pour tout $\hat{s}_i \in S_i$ et pour tout $s_{-i} \in S_{-i}$. En particulier, cela implique que pour tout i et pour tout $\theta_i \in \Theta_i$:

$$u_i(g(s_i^*, s_{-i}^*), \theta_i) \geq u_i(g(\hat{s}_i, s_{-i}^*), \theta_i)$$

pour tout $\hat{s}_i \in S_i$. Et puisque $g(s^*) = f(\theta)$, on a pour tout i et pour tout $\theta_i \in \Theta_i$:

$$u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \geq u_i(f(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_i)$$

pour tout $\hat{\theta}_i, \theta_{-i}$ tel que $f(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) = g(\hat{s}_i, s_{-i}^*)$.

Ceci est la définition recherchée. □

2.1.1 Théorème de Gibbard-Satterthwaite

Définition 16 (Dictateur). *La fonction de choix social f induit un dictateur s'il existe un agent i tel que pour tout $\theta \in \Theta$, $f(\theta) \in \{x \in X : u_i(x, \theta_i) \geq u_i(y, \theta_i) \forall y \in X\}$.*

Théorème 1 (Gibbard-Satterthwaite). *Soit X un ensemble fini d'alternatives qui contient au moins trois éléments. Soit de plus $\mathcal{R}_i = \mathcal{P} \forall i$ (l'ensemble de toutes les préférences possibles) et soit Θ tel que $f(\Theta) = X$. Alors, la fonction de choix social est implémentable en stratégie dominante si et seulement si elle induit un dictateur.*

Démonstration. À faire. Similaire au théorème d'Arrow (voir les notes sur les choix sociaux). □

Bref, il n'y a pas une très grande classe de problèmes qu'on peut implémenter en stratégie dominante dans les conditions du théorème. Il y a cependant une classe de problèmes qui sont étudiés. Ils supposent que X est infini (et donc contournent le précédent théorème), mais restreignent les fonctions d'utilité des agents aux formes quasi-linéaires. C'est le but de la section sur le mécanisme de Groves.

2.2 En stratégie bayésienne

Proposition 2 (Principe de révélation en équilibre bayésien). *Soit $\Gamma = (S_1, \dots, S_I, g(\cdot))$ un mécanisme qui implémente une fonction de choix social f en équilibre bayésien. Alors, $f(\cdot)$ est véridiquement implemantable en équilibre bayésien.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe un équilibre bayésien $s^* = (s_1^*, \dots, s_I^*)$ tel que $g(s^*) = f(\theta) \forall \theta_i, i$ et tel que

$$E[u_i(g(s_i^*, s_{-i}), \theta_i) | \theta_i] \geq E[u_i(g(s_i', s_{-i}^*), \theta_i) | \theta_i] \quad \forall s_i'$$

en particulier, puisque $g(s^*) = f(\theta)$, on a que pour tout i et tout $\theta_i \in \Theta_i$

$$E[u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) | \theta_i] \geq E[u_i(f(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) | \theta_i)] \quad \forall \hat{\theta}$$

ce qui est exactement la définition de fonction véridiquement implemantable en équilibre de Nash. \square

Bref, pour trouver un équilibre bayésien, on peut uniquement se concentrer sur ceux qui sont véridiques.

3 Implementation

3.1 Stratégie Bayésienne : design de mécanisme à un seul agent

Définition 17 (Problème du principal). *Soit $x \in X \subset \mathbb{R}$ tel que X est fini. Soit de plus $\Theta := \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \in \mathbb{R}^n$ un nombre fini de types possibles avec probabilités p_1, \dots, p_n . L'utilité du principal est $u_0(x, \theta) + t$. L'utilité de l'agent est $u_1(x, \theta) - t$.*

Par le principe de révélation, le problème du principal est alors le suivant :

$$\begin{aligned} \max_{t,x} E[u_0(x, \theta) + t | \theta_0] &= \max_{t,x} \sum_i p_i (u_0(x_i, \theta_i) + t_i) \\ \text{sujet à} \quad &u_1(x_i, \theta_i) - t_i \geq u_1(x_j, \theta_i) - t_j \quad \forall i, j \quad (\text{CI}_{ij}) \\ &t_0 = x_0 = 0 \end{aligned}$$

Définition 18 (Supermodularité). *Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est (strictement) supermodulaire si $\forall y'' > y'$ et $\forall z'' > z'$ on a que*

$$f(y'', z'') - f(y', z'') \geq (>) f(y'', z') - f(y', z')$$

Intuitivement, la complémentarité indique que les deux arguments sont complémentaires. C'est mieux de les faire croître en même temps.

Proposition 3. Soit f deux fois différentiable. Alors f est supermodulaire si et seulement si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \geq 0$ partout.

Démonstration. Trivial. □

Définition 19 (Implementabilité). Un vecteur $x := (x_1, \dots, x_I)$ est implemantable s'il existe un $t = (t_1, \dots, t_I)$ tel que (CI_{ij}) est respecté pour tout i, j .

Proposition 4. Supposons que $u_1(x, \theta)$ est supermodulaire³. Alors, x est implemantable si et seulement si x est non décroissant : $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$.

Démonstration.

(Seulement si) Supposons que $x_i < x_k$ pour $i > k$. En additionnant les $CI_{i,k}$ et $CI_{k,i}$, on trouve que $u_1(x_k, \theta_k) - u_1(x_i, \theta_k) \geq u_1(x_k, \theta_i) - u_1(x_i, \theta_i)$, ce qui contredit la supermodularité.

(Si) Soit $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$. Supposons que les $CI_{i,i-1}$ tiennent avec égalité. On va montrer qu'alors, toutes les CI tiennent.

1. Si $CI_{i,i-1}$ tiennent avec égalité, alors pour tout $k < i$, $CI_{k,i}$ tient avec égalité :

$$\begin{aligned}
t_i - t_k &= (t_i + t_{i-1}) + (t_{i-1} - t_{i-2}) + \dots + (t_{k+1} - t_k) \\
&= (u_1(x_i, \theta_i) - u_1(x_{i-1}, \theta_i)) && \text{(par } CI_{i,i-1}) \\
&\quad + (u_1(x_{i-1}, \theta_i) - u_1(x_{i-2}, \theta_i)) + \dots \\
&\quad \dots + (u_1(x_{k+1}, \theta_i) - u_1(x_k, \theta_i)) \\
&\geq (u_1(x_i, \theta_k) - u_1(x_{i-1}, \theta_i)) && \text{(par supermodularité)} \\
&\quad + (u_1(x_{i-1}, \theta_k) - u_1(x_{i-2}, \theta_k)) + \dots \\
&\quad \dots + (u_1(x_{k+1}, \theta_k) - u_1(x_k, \theta_k)) \\
&= u_1(x_i, \theta_k) - u_1(x_k, \theta_k)
\end{aligned}$$

On a donc que $t_i - t_k \geq u_1(x_i, \theta_k) - u_1(x_k, \theta_k)$, ce qui est $CI_{k,i}$.

2. Si $CI_{i,i-1}$ tiennent avec égalité, alors pour tout $k < i$, $CI_{i,k}$ tient avec égalité :

$$\begin{aligned}
t_i - t_k &= (t_i - t_{i-1}) + (t_{i-1} - t_{i-2}) + \dots + (t_{k+1} - t_k) \\
&= (u_1(x_i, \theta_i) - u_1(x_{i-1}, \theta_i)) \\
&\quad + (u_1(x_{i-1}, \theta_{i-1}) - u_1(x_{i-2}, \theta_{i-1})) + \dots \\
&\quad \dots + (u_1(x_{k+1}, \theta_{k+1}) - u_1(x_k, \theta_{k+1})) \\
&\leq (u_1(x_i, \theta_i) - u_1(x_{i-1}, \theta_i)) \\
&\quad + (u_1(x_{i-1}, \theta_{i-1}) - u_1(x_{i-2}, \theta_i)) + \dots \\
&\quad \dots + (u_1(x_{k+1}, \theta_i) - u_1(x_k, \theta_i)) \\
&= u_1(x_i, \theta_i) - u_1(x_k, \theta_i)
\end{aligned}$$

³En d'autres termes, la volonté de payer pour x augmente avec le type de l'agent.

3. Construisons un t tel que chaque $\text{CI}_{i,i-1}$ tient pour égalité. Soit $t_0^* = 0$ et

$$t_i^* = t_{i-1}^* + u_1(x_i, \theta_i) - u_1(x_{i-1}, \theta_i) \quad \forall i \neq 0$$

Ce t satisfait toutes les $\text{CI}_{i,i-1}$ avec égalité et donc, par les deux étapes précédentes, toutes les CI sont respectées. □

Proposition 5 (Profit optimal). *Sous l'hypothèse de supermodularité de u_1 , le contrat optimal qui implemente x prend la forme :*

$$\begin{aligned} t_0^* &= 0 \\ t_i^* &= t_{i-1}^* + u_1(x_i, \theta_i) - u_1(x_{i-1}, \theta_i) \quad \forall i \neq 0 \end{aligned}$$

Démonstration. Soit t une solution qui répond à toutes les CI et qui ne respecte pas la construction énoncée dans la proposition. Cela implique qu'il existe au moins un i tel que $t_i < t_{i-1} + u_1(x_i, \theta_i) - u_1(x_{i-1}, \theta_i)$. Si c'était plus grand, une des CI serait violée. L'ensemble des i est fini, alors on peut choisir le plus petit i' tel que $t_{i'} < t_{i'-1} + u_1(x_{i'}, \theta_{i'}) - u_1(x_{i'-1}, \theta_{i'})$. Soit alors $\tilde{t}_{i'} = t_{i'-1} + u_1(x_{i'}, \theta_{i'}) - u_1(x_{i'-1}, \theta_{i'-1})$ et $\tilde{t}_{i+1} = t_i + u_1(x_{i+1}, \theta_{i+1}) - u_1(x_i, \theta_{i+1}) \quad \forall i > i'$. Définissons :

$$\tilde{t} := \begin{cases} t_i & \text{si } i < i' \\ \tilde{t}_i & \text{autrement} \end{cases}$$

Par la proposition précédente, ce nouveau \tilde{t} est implementable. Par ailleurs, puisque chaque $\tilde{t}_i \geq t$ on en déduit que le profit du principal est plus grand. En conséquence, t ne peut être un maximum et donc, la proposition est vraie. □

Corrolaire 1 (Réécriture du problème du principal). *Sous-hypothèse de supermodularité de u_1 , le problème du principal peut se réécrire de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} \max_{t,x} E[u_0(x, \theta) + t|\theta_0] &= \max_{t,x} \sum_i p_i (u_0(x_i, \theta_i) + t_i) \\ \text{sujet à} \quad x_0 &= 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \end{aligned}$$

Démonstration. Découle directement des deux dernières propositions. □

Définition 20 (Problème simplifié du principal). *Dans les mêmes conditions que la version générale du problème du principal, le problème simplifié est le suivant :*

$$\begin{aligned} \max_{t,x} E[u_0(x, \theta) + t|\theta_0] &= \max_{t,x} \sum_i p_i (u_0(x_i, \theta_i) + t_i) \\ \text{sujet à} \quad x_i &\geq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

Définition 21 (Fonction “omega”). *Pour fin de notation, soit les deux fonctions suivantes :*

$$P_i := \sum_{j=i}^n p_j$$

$$\omega(x, i) := u_0(x, \theta_i) + \frac{P_i}{p_i} u_1(x, \theta_i) - \frac{P_{i+1}}{p_i} u_1(x, \theta_{i+1})$$

Lemme 1. *Étant donné les définitions et hypothèses précédentes :*

$$\sum_i p_i (u_0(x_i, \theta_i) + t_i^*) = - \sum_{j=1}^n p_j u_1(x_0, \theta_1) + \sum_i p_i \phi(x_i, i)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sum_i p_i (u_0(x_i, \theta_i) + t_i^*) &= p_1 u_0(x_1, \theta_1) + p_1 u_1(x_1, \theta_1) - p_1 u_1(x_0, \theta_1) \\ &\quad + p_2 u_0(x_2, \theta_2) + p_2 u_1(x_1, \theta_1) - p_2 u_1(x_0, \theta_1) + p_2 u_1(x_2, \theta_2) - p_2 u_1(x_1, \theta_2) \\ &\quad + \dots \\ &= -u_1(x_0, \theta_1) \sum_{j=1}^n p_j \\ &\quad + p_1 u_0(x_1, \theta_1) + \sum_{j=1}^n p_j u_1(x_1, \theta_1) - \sum_{j=2}^n p_j u_1(x_1, \theta_2) \\ &\quad + p_2 u_0(x_2, \theta_2) + \sum_{j=2}^n p_j u_1(x_2, \theta_2) - \sum_{j=2}^n p_j u_1(x_2, \theta_2) \\ &\quad + \dots \\ &= -u_1(x_0, \theta_1) \sum_{j=1}^n p_j + \sum_i p_i u_0(x_i, \theta_i) + \sum_i P_i u_1(x_i, \theta_i) - \sum_{i=1}^n P_{i+1} u_1(x_i, \theta_{i+1}) \\ &= - \sum_{j=1}^n p_j u_1(x_0, \theta_1) + \sum_i p_i \phi(x_i, i) \end{aligned}$$

□

Lemme 2. *Soit Y un sous-ensemble fini de \mathbb{R} et $f : Y \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction supermodulaire. Alors, $Y^*(z) := \max_y f(y, z)$ est non décroissant en z .*

Démonstration. Nous procédons par l'absurde. Supposons que $z'' > z'$ et $\max Y^*(z'') < \max Y^*(z')$. puisque Y^* est un maximum, nous avons :

$$\begin{aligned} f(\max Y^*(z''), z'') &\geq f(\max Y^*(z'), z') \\ f(\max Y^*(z'), z') &\geq f(\max Y^*(z''), z') \end{aligned}$$

Combinant la supermodularité et l'hypothèse que $\max Y^*(z'') < \max Y^*(z')$, nous avons :

$$\begin{aligned} f(\max Y^*(z'), z'') - f(\max Y^*(z'), z') &\geq f(\max Y^*(z''), z'') - f(\max Y^*(z''), z') \\ \Rightarrow -f(\max Y^*(z''), z'') - f(\max Y^*(z'), z') &\geq -f(\max Y^*(z'), z'') - f(\max Y^*(z''), z') \\ \Rightarrow f(\max Y^*(z''), z'') + f(\max Y^*(z'), z') &\leq f(\max Y^*(z'), z'') + f(\max Y^*(z''), z') \end{aligned}$$

Avec les inégalités présentées ci-haut, on observe une contradiction immédiate. \square

Proposition 6 (Conditions pour équivalence du problème simplifié). *Si u_1 est supermodulaire et ϕ est supermodulaire, alors le problème simplifié a x tel que $x_0 = 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ pour solution.*

Démonstration. Le problème de maximisation

$$\max_x \sum_i p_i (u_0(x_i, \theta_i) + t_i^*(x))$$

peut se réécrire comme

$$\max_x \sum_i p_i \phi(x_i, i) = \sum_i p_i \max_x \phi(x_i, i)$$

par l'avant dernier lemme.

Par le lemme précédent, on sait que la solution à $\sum_i p_i \max_x \phi(x_i, i)$ à une solution non décroissante $x_0^* \leq x_1^* \leq \dots \leq x_n^*$. Il s'en suit que le problème simplifié a aussi une solution non décroissante, ce qui implique que le problème général est sans contraintes mordantes. \square

Lemme 3 (Propriétés de supermodularité).

1. Si $f(y, z)$ et $g(y, z)$ sont supermodulaires, alors $f(y, z) + g(y, z)$ est supermodulaire également.
2. Soit $f(y, z)$ est supermodulaire et non croissante en y . Soit $g(z)$ non négative et non-croissante en z . Alors $f(y, z)g(z)$ est supermodulaire également.

Démonstration.

1. Par la supermodularité, nous avons $\forall z'' > z', y'' > y'$:

$$\begin{aligned} f(y'', z'') - f(y'', z') &\geq f(y', z'') - f(y', z') \\ g(y'', z'') - g(y'', z') &\geq g(y', z'') - g(y', z') \\ \Rightarrow [f(y'', z'') + g(y'', z'')] - [f(y'', z') + g(y'', z')] &\geq [f(y', z'') + g(y', z'')] - [f(y', z') + g(y', z')] \end{aligned}$$

2. Puisque f est non croissante en y et que g est non croissante en z , nous avons, pour $y'' > y'$ et $z'' > z'$:

$$\begin{aligned} \underbrace{(f(y'', z'') - f(y', z''))}_{\leq 0} \underbrace{(g(z'') - g(z'))}_{\leq 0} &\geq 0 \\ \Rightarrow (f(y'', z'') - f(y', z'')) g(z'') &\geq (f(y'', z'') - f(y', z'')) g(z') \\ &\geq (f(y', z'') - f(y', z')) g(z') \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est due à la supermodularité de f .

□

Proposition 7 (Résumé). *Soit les hypothèses suivantes :*

1. u_1 supermodulaire en x et θ_i .
2. $\frac{p_i}{P_i}$ non décroissante en $i \in \{1, \dots, n\}$
3. u_0 supermodulaire en x et θ_i .
4. $u_1(x, \theta_i) - u_1(x, \theta_{i+1})$ supermodulaire en x et i .

Alors, le problème du principal peut s'énoncer comme suit :

$$\begin{aligned} x_i^* &\in \max_x p_i u_0(x, \theta_i) + P_i u_1(x, \theta_i) - P_{i+1} u_1(x, \theta_{i+1}) \\ \text{subject à} \quad x_i &\geq 0 \forall i \\ x_0^* &= 0 \\ t_i^* &= t_{i-1}^* + u_1(\hat{x}_i, \theta_i) - u_1(\hat{x}_{i-1}, \theta_i) \forall i \neq 0 \\ t_0^* &= 0 \end{aligned}$$

Démonstration. Nous avons que $\phi(x, i) = u_0(x, \theta_i) + \frac{P_i}{p_i} [u_1(x, \theta_i) - u_1(x, \theta_{i+1})] + u_1(x, \theta_{i+1})$. Par la deuxième hypothèse $\frac{P_i}{p_i}$ est non négative et non croissante. Par la quatrième hypothèse et le lemme précédent, on a que $\frac{P_i}{p_i} [u_1(x, \theta_i) - u_1(x, \theta_{i+1})]$ est supermodulaire. Par la troisième hypothèse, u_0 est supermodulaire et par la première hypothèse, u_1 est supermodulaire. Par le premier item du lemme précédent, on a que ϕ est super modulaire.

La conclusion découle alors des deux dernières propositions. □

3.2 Stratégie bayésienne : design de mécanisme à plusieurs agents

Section beaucoup moins formelle. On procède avec des exemples.

3.2.1 Exemple d'encant à deux joueurs

1. Principal : un vendeur ($i = 0$). Agents : deux acheteurs $i \in \{1, 2\}$.
2. Deux types possibles pour les agents : $\theta_i \in \{\theta_L, \theta_H\}$. $P(\theta_i = \theta_H) = p$
3. Utilité du principal : $t_1 + t_2$. Utilité des acheteurs :

$$u_i = \begin{cases} \theta_i - t_i & \text{s'il gagne l'encant ;} \\ -t_i & \text{s'il ne gagne pas l'encant.} \end{cases}$$

4. Le principe de révélation nous permet de nous concentrer uniquement sur les équilibres qui dépendent du type des individus. Ainsi, nous aurons pour stratégie :

$$\begin{aligned} x_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) &= P(i \text{ gagne l'encant}), \text{ étant donné } \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \\ t_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) &= \text{prix payé par } i, \text{ étant donné } \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \end{aligned}$$

En d'autres termes, les agents seront honnêtes si :

$$\begin{aligned} x_H &= E[x_i(\theta_H, \theta_j)] & x_L &= E[x_i(\theta_L, \theta_j)] \\ t_h &= E[t_i(\theta_H, \theta_j)] & t_L &= E[t_i(\theta_L, \theta_j)] \end{aligned}$$

et si :

$$\begin{aligned} \theta_L x_L - t_L &\geq 0 & (\text{CP}_L) \\ \theta_H x_H - t_H &\geq 0 & (\text{CP}_H) \\ \theta_L x_L - t_L &\geq \theta_L x_H - t_H & (\text{CI}_L) \\ \theta_H x_H - t_H &\geq \theta_H x_L - t_L & (\text{CI}_H) \end{aligned}$$

Les deux premières contraintes (CP_L, CP_H) sont les contraintes de participation : le gain d'une possible victoire à l'encant doit être supérieure à zéro étant donné le type. Les deux dernières contraintes (CI_L, CI_H) sont celles d'honnêteté : le gain de révéler son vrai type doit être supérieur au gain de mentir.

5. Nous savons que si CP_L et CI_H sont respectées, les autres contraintes seront respectées également (supermodularité). Nous avons donc que le profit maximal par le principal sera atteint par les plus haut t respectants les contraintes :

$$\begin{aligned} t_L &= \theta_L x_L \\ t_H &= t_L + \theta_H (x_H - x_L) \\ &= \theta_L x_L + \theta_H (x_H - x_L) \end{aligned}$$

6. Il s'en suit que l'utilité espérée par le principal sera :

$$\begin{aligned}
E[t_1 + t_2] &= E[t_1] + E[t_2] \\
&= 2[p t_H + (1-p)t_L] \\
&= 2[p(\theta_L x_L + \theta_H(x_H - x_L)) + (1-p)(\theta_L x_L)] \\
&= 2[p\theta_H x_H + (\theta_L - p\theta_H)x_L]
\end{aligned}$$

7. Deux contraintes supplémentaires sont inhérentes au jeu, dû aux probabilités :

$$\begin{aligned}
(1-p)x_L + px_H &\leq \frac{1}{2} \\
x_H &\leq (1-p) \cdot 1 + \frac{1}{2}p = 1 - \frac{1}{2}p
\end{aligned}$$

8. Premier cas : $\theta_L < p\theta_H$. Dans ce cas, l'utilité du principal est décroissante en x_L . Le principal ne vendra pas à θ_L . Il s'en suit que $x_L = 0$. En conséquence, $x_H = 1 - \frac{1}{2}p$ et donc $t_h = \theta_H(1 - 1/2p)$.

9. Deuxième cas : $\theta_L > p\theta_H$. Le principal voudra vendre. Dans ce cas, nous avons que $x_L = \frac{1}{2}(1-p)$ et $x_H = 1 - 1/2p$ et donc :

$$\begin{aligned}
t_L &= \frac{1}{2}\theta_L(1-p) \\
t_H &= \frac{1}{2}\theta_L(1-p) + \theta_H(1 - 1/2p - 1/2(1-p)) \\
&= \frac{1}{2}(1-p)\theta_L + \frac{1}{2}\theta_H
\end{aligned}$$

3.3 Cas particulier en stratégie dominante : Mécanisme de Groves

Ici⁴, $x \in X$ prend la forme $x := \{k, t_1, \dots, t_I\}$ où k est un élément d'un ensemble fini K (le choix du projet) et $t_i \in \mathbb{R}$ sont des transferts numéraires (argent). Les fonctions d'utilité de l'agent i sont de la forme

$$u_i(x, \theta_i) = v_i(k, \theta_i) + \bar{m}_i + t_i$$

où \bar{m}_i est le montant initial d'argent de l'agent i .

Nous supposons être en système fermé où les agents I n'ont pas d'autres sources de revenus. L'ensemble des choix possibles est donc

$$X := \left\{ x := (k, t_1, \dots, t_I) : k \in K, t_i \in \mathbb{R} \forall i, \sum_i t_i \leq 0 \right\}$$

⁴Définitions à formaliser dans cette section.

Dans ce contexte, une fonction de choix social $f(\cdot) = (k(\cdot), t_1(\cdot), \dots, t_I(\cdot))$ tel que l'image appartient à X . De plus, une telle fonction f sera efficiente si :

$$\sum_{i=1}^I v_i(k(\theta), \theta_i) \geq \sum_{i=1}^I v_i(k, \theta_i) \quad \forall k \in K \quad (\text{E})$$

Proposition 8 (Équilibre de Groves en stratégie dominante). *Soit $k^*(\cdot)$ une fonction qui satisfait (E). La fonction de choix social $f(\cdot) = (k^*(\cdot), t_1(\cdot), \dots, t_I(\cdot))$ est véridiquement implémentable en stratégie dominante si, pour tout i , nous avons :*

$$t_i(\theta) = \left[\sum_{j \neq i} v_j(k^*(\theta), \theta_j) \right] + h_i(\theta_{-i})$$

où h_i est une fonction arbitraire qui dépend de θ_{-i} .

Démonstration. Nous procédons par contradiction. Supposons qu'il n'existe pas de stratégie dominante véridique pour un agent i , alors il existe un $\theta_i, \hat{\theta}_i$ et θ_{-i} tel que

$$v_i(k^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-1}), \theta_i) + t_i(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}) > v_i(k^*(\theta_i, \theta_{-1}), \theta_i) + t_i(\theta_i, \theta_{-i})$$

En substituant les t_i définis dans l'énoncé, on trouve :

$$\begin{aligned} v_i(k^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-1}), \theta_i) + \left[\sum_{j \neq i} v_j(k^*(\theta), \theta_j) \right] + h_i(\theta_{-i}) &> v_i(k^*(\theta_i, \theta_{-1}), \theta_i) + \left[\sum_{j \neq i} v_j(k^*(\theta), \theta_j) \right] + h_i(\theta_{-i}) \\ \Rightarrow v_i(k^*(\hat{\theta}_i, \theta_{-1}), \theta_i) + \left[\sum_{j \neq i} v_j(k^*(\theta), \theta_j) \right] &> \sum_j v_j(k^*(\theta), \theta_j) \end{aligned}$$

Cette dernière équation contredit le principe d'efficience (E) énoncé plus haut. \square