Résumé micro (Théorie des jeux)

Pier-André Bouchard St-Amant[*]

1 Théorie des jeux

1.1 Jeux statiques

Définition 1 (Jeux en forme extensive)**.** *Un jeux en forme extensive est un ensemble*

$$\Gamma_E := \{\mathcal{X}, \mathcal{A}, I, p(\cdot), \alpha(\cdot), \mathcal{H}, \imath(\cdot), \rho(\cdot), u\}$$

où chaque élément est défini comme suit :

1. *Un ensemble fini de noeuds $\mathcal{X}$.*
2. *Un ensemble fini d'actions $\mathcal{A}$ (gauche ou droite, par exemple).*
3. *Un ensemble fini de joueurs $I := \{0, 1, \ldots, I\}$. Par convention, la nature est le joueur 0.*
4. *Une relation d'ordre partielle $p : \mathcal{X} \to \{\mathcal{X} \cup \emptyset\}$ spécifiant un unique prédécesseur pour chaque noeud $x \in \mathcal{X}$ sauf un, nommé le noeud initial (noté x_0). L'ensemble $s(x) := p^{-1}(x)$ représente les successeurs de x. Les noeuds $T := \{x \in \mathcal{X} : s(x) = \emptyset\}$ sont appelés noeuds terminaux. Les noeuds $\mathcal{X} \setminus T$ sont appelés noeuds de décision.*
5. *Une fonction d'action $\alpha : \mathcal{X} \setminus x_0 \to \mathcal{A}$ aillant la propriété que $x', x'' \in s(x), x' \neq x'' \Rightarrow \alpha(x') \neq \alpha(x'')$. Notons $c(x) := \{a \in \mathcal{A} : a = \alpha(x'), x' \in s(x)\}$ l'ensemble des choix possibles au noeud x.*
6. *Une collection d'ensemble $\mathcal{H}$ désignant les ensembles d'information et une fonction $H : \mathcal{X} \to \mathcal{H}$ assignant chaque noeud $x \in \mathcal{X}$ à un ensemble d'information $H(x) \in \mathcal{H}$. Les noeuds dans les ensembles d'informations ont les mêmes actions possibles. $x, x'' \in H(x) \Rightarrow c(x) = c(x')$. En conséquence, on définit les choix possibles en $H(x)$ est notée $C(H) := \{c(x) : x \in H(x)\}$.*
7. *Une fonction $\imath : \mathcal{X} \to I$ assignant un noeud à chaque joueur. La fonction est telle que $x, x' \in H(x) \Rightarrow \imath(x) = \imath(x')$. On note l'ensemble des ensembles d'information d'un joueur $\mathcal{H}_i := \{H \in \mathcal{H} : i = \imath(H)\}$.*

[*]bouchard@lse.ac.uk.

8. *Une fonction probabiliste $\rho : \mathcal{H}_0 \times \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ assignant une probabilité à chaque action que peut prendre la nature. La fonction doit satisfaire $a \notin C(H) \Rightarrow \rho(H,a) = 0$ et $\sum_{a \in C(H)} \rho(H,a) = 1$.*
9. *Un ensemble de fonctions de paiments de type Bernouilli $u := \{u_1, \ldots, u_I\}$ associé à chaque joueur autre que la nature. La fonction donne le paiement de chaque joueur pour chaque noeud terminal.*

Définition 2 (Stratégie pure)**.** *Une stratégie pure est une fonction pour chaque joueur $s_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{A}$ telle que $s_i(H) \in C(H) \forall H \in \mathcal{H}_i$. Nous notons S_i l'ensemble des stratégies possible du joueur i.*

Définition 3 (Profil de stratégie)**.** *Nous notons $s := \{s_1, \ldots, s_I\} \in S := S_1 \times \cdots \times S_I$ un profil de stratégies (une stratégie pour chaque joueur).*

Définition 4 (Convention d'écriture pour joueur manquant)**.** *L'indice X_{-i} désignera un objet quelconque auquel on a enlevé l'élément faisant référence au joueur i. Ainsi, s_{-i} fait référence à un profil de stratégie où la stratégie s_i est manquante. Similairement, σ_{-i} fait référence aux stratégies mixtes et $S_{-i} := S_i \times \ldots S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_I$.*

Définition 5 (Jeux en forme normale)**.** *Une jeux en forme normale est un ensemble*

$$\Gamma_N := \{I, \{S_i\}, \{u_i\}\}$$

spécifiant, les joueurs, les stratégies possible de chaque joueur et les paiements associés à chaque résultat de stratégie.

Définition 6 (Stratégie mixte)**.** *Une stratégie mixte est une collection de stratégies pures $\{s_i\} \subset S_i$ et de probabilités associés à chacune des stratégies $\sigma_i : \{s_i\} \rightarrow [0,1]$ telles que $\sum_{s_i \in \{s_i\}} \sigma_i(s_i) = 1$. On la note par $\sigma_i \in \Delta(S_i)$.*

On note qu'une stratégie pure est un cas particulier (dégénéré) de stratégie mixte.

Définition 7 (Stratégie behavioriale)**.** *Une stratégie behavioriale est une fonction probabiliste $\lambda_i : C(H) \times \mathcal{H}_i \rightarrow [0,1]$ telle que $\sum_{a \in C(H)} \lambda_i(a,H) = 1 \ \forall H \in \mathcal{H}_i$.*

Une stratégie mixe introduit une composante aléatoire sur les stratégies alors qu'une stratégie behavioriale introduit une composante aléatoire non pas sur les stratégies, mais sur les actions dans les ensembles d'information.

1.2 Type de stratégies et équilibres

1.2.1 Stratégies dominantes

Définition 8 (Stratégie (faiblement) dominante)**.** *Soit Γ_n un jeux en forme normale. Une stratégie σ_i est dite (faiblement) dominante pour le joueur i si $\forall \sigma_i', \sigma_i' \neq \sigma_i \Rightarrow u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > (\geq) u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$ pour tout $\sigma_{-i} \in \Delta(S_{-i})$.*

Une stratégie est dominante si, peu importe ce que sera la stratégie de l'autre, la stratégie du joueur i maximisera toujours son paiment.

Définition 9 (Stratégie dominée)**.** *Soit Γ_n un jeux en forme normale aillant une stratégie dominante σ_i. Alors, toute autre stratégie s'_i est dite dominée.*

1.2.2 Stratégies rationnelles (information complète)

Définition 10 (Meilleure réponse)**.** *Soit Γ_N un jeux et σ_{-i} un profil incomplet de stratégie. L'ensemble des meilleures réponse du joueur i est $B_i(\sigma_{-i}) := \{\sigma_i, \max_{\sigma_i \in \Delta(S_i)} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})\}$*

C'est une correspondance, pas nécessairement une fonction.

Définition 11 (Stratégies rationelles)**.** *L'ensemble des stratégies rationnelles sont les stratégies qui ne sont pas dominées et qui ne sont pas (nécessairement) une meilleur réponse.*

Dans le cas de jeux à deux joueurs, l'ensemble des stratégies rationnelles est le même que celui des meilleures réponses. À plus d'un joueur, cependant, l'ensemble des stratégies rationnelles peut-être plus grand.

1.2.3 Équilibre de Nash

Définition 12 (Équilibre de Nash)**.** *Un profil de stratégie $s := \{s_1, \ldots, s_I\}$ constitue un équilibre de Nash si $s_i \in B_i(s_{-i})\ \forall i$.*

Définition 13 (Équilibre de Nash mixte)**.** *Un profil de stratégie $\sigma := \{\sigma_1, \ldots, \sigma_I\}$ constitue un équilibre de Nash mixte si $\sigma_i \in B_i(\sigma_{-i})\ \forall i$.*

À l'évidence, la définition 13 englobe la définition 12.

Proposition 1. *Soit $S_i^+ \subset S_i$ l'ensemble des stratégies jouées avec probabilité positive dans la stratégie mixte σ. Alors, σ est un équilibre de Nash mixte si et seulement si :*

1. $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s'_i, \sigma_{-i})\ \forall s_i, s'_i \in S_i^+$
2. $u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s'_i, \sigma_{-i})\ \forall s_i \in S_i^+, \forall s'_i \notin S_i^+$

Corrolaire 1. *Un équilibre de Nash en stratégie pure est forcément un équilibre de Nash en stratégie mixte dégénéré.*

Définition 14 (Hémi-continuité supérieure[1])**.** *Une correspondance $f : X \to Y$ est hémi-continue supérieure (HCS) si pour toute suite $(x_n, y_n) \in X \times Y$ telle que $y_n \in f(x_n)$ et $(x_n, y_n) \to (x, y)$, nous avons que $y \in f(x)$.*

[1] "Upper Hemi-Continuity"

Notez qu'en particulier, si la correspondance HCS est une fonction, alors la fonction est continue.

Théorème 1 (Kakutani). *Soit X un sous-ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^n$. Si $f : X \to Y$ est une correspondance HCS telle que $f(x) \neq \emptyset$ $\forall x \in X$ et $f(x)$ est convexe pour tout $x \in X$, alors il existe un point fixe x^* tel que $x^* \in f(x^*)$.*

Théorème 2 (Existence d'équilibre de Nash en stratégie mixte). *Soit Γ tel que S est fini. Alors il existe au moins un équilibre en stratégie mixte.*

Théorème 3 (Existence d'équilibre de Nash). *Soit $\Gamma_N = \{I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}\}$ un jeux tel que :*

1. *S_i est un sous-ensemble non-vide, convexe et compact de $\mathbb{R}^n$.*
2. *u_i est continue et quasi-concave en $(s_1, \dots, s_I)$ et quasiconcave en s_i.*

Alors, il existe au moins un équilibre de Nash.

Les conditions du théorème garantissent l'existence. Ce ne sont pas des conditions nécessaires.

1.2.4 Équilibre de Nash bayesiens (information incomplète)

Définition 15 (Jeux Bayesien). *Un jeux Γ_E est dit bayesien si le premier joueur est la nature et si la structure du chaque sous-jeux est similaire en structure, mais pas nécessairement en paiements. On note Θ l'espace probabiliste associé aux actions de la nature et F la fonction de densité jointe des actions de la nature.*

Définition 16 (Stratégie pure en jeux Bayesien). *Une stratégie pure en jeux bayesien est une stratégie $s_i \in \mathcal{P}$ qui spécifie les actions du joueur i pour chaque état possible de la nature.*

Une stratégie pure est donc un cas particulier de stratégie pure en jeux Bayesien.

Définition 17 (Paiement espéré). *Soit Γ_E un jeux bayesien. Le paiement espéré d'une stratégie pure en jeux bayesien est l'espérance d'utilité obtenu par la stratégie : $\tilde{u}_i(s) := E[u_i(s)]$*

On en déduit alors que les joueurs auront une stratégie pure dans un jeux sans nature avec les paiements espérés.

Définition 18 (Équilibre de Nash bayesiens). *Soit $\Gamma_E = \{I, \{S_i\}, \{u_i\}, \Theta, F\}$ un jeux bayesien. Un équilibre bayesien est un profil de décision en jeux bayesien $(s_1, \dots, s_I)$ qui constitue un équilibre de Nash sur le jeux $\tilde{\Gamma}_N := \{I, \mathcal{P}, \{\tilde{u}_i\}\}$.*

Proposition 2 (Équivalence). *Un profil de décision s en jeux Bayesien est un équilibre Bayesien si et seulement si, pour tout joueur i, pour toute $\bar{\theta}_i \in \Theta > 0$ et pour tou $s'_i \in S_i$, nous avons que*

$$E_{\theta_{-1}}[u_i(s_i(\bar{\theta}), s_{-i}(\theta), \bar{\theta}_i)|\bar{\theta}_i] \geq E_{\theta_{-i}}[u_i(s'_i, s_{-i}(\theta_{-i}), \bar{\theta}_i|\bar{\theta}_i]$$

1.2.5 Équilibre de Nash en main tremblante

Définition 19 (Jeux perturbé). *Un jeux perturbé est un ensemble*

$$\Gamma_\epsilon := \{I, \{\Delta_\epsilon(S_i)\}, \{u_i\}\}$$

où :

1. $\Delta_\epsilon := \{\sigma_i : \sigma_i(s_i) \geq \epsilon_i(s_i)\ \forall s_i \in S_i, \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\}$, *soit l'espace des stratégies mixtes où une stratégie choisie est jouée avec une probabilité plus grande que $\epsilon_i(s_i)$ et que la somme des probabilités jouées est égale à 1.*
2. $\epsilon_i(s_i)$ *est une probabilité de faire une erreur sur la stratégie (i.e. de choisir une autre stratégie par erreur).*

Définition 20 (Équilibre de Nash en main tremblante). *Soit Γ_N un jeux. Un équilibre de Nash est un équilibre de Nash en main tremblante (NMT) s'il existe une suite de jeux Γ_{ϵ^k} convergeant vers Γ_N (au sens où $\lim_{k\to\infty} \epsilon_i^k = 0\ \forall i, s_i$) telle qu'une certaine suite d'équilibre de Nash σ^k converge vers σ (au sens où $\lim_{k\to\infty} \sigma^k = \sigma$).*

Définition 21 (Stratégie totalement mixte). *Une stratégie totalement mixte est une stratégie mixte où chaque stratégie pure est jouée avec probabilité non-nulle.*

Proposition 3. *Un équilibre de Nash σ d'un jeux Γ_N est NMT si et seulement si il existe un suite de stratégie totalement mixte σ^k telle que $\sigma^k \to \sigma$, $\sigma_i^k \in B(\sigma_{-i}^k)$ et $\sigma_i \in B(\sigma_{-i})$.*

Proposition 4. *Si σ est un équilibre NMT, alors σ_i n'est pas faiblement dominé pour tout i.*

1.2.6 Équilibre de Nash sous-jeux parfait

Définition 22 (Induction à rebours). *Soit Γ_E un jeux fini en information complète. La méthode d'induction à rebours consiste à partir des noeuds terminaux et de choisir pour chaque noeud de décision le noeud terminal qui maximise le paiement du joueur associé au noeud de décision pour ainsi obtenir un arbre réduit.*

Proposition 5 (Théorème de Zarmelo). *N'importe quel jeux Γ_E fini en information parfaite (chaque ensemble d'information est un singleton) possède au moins un équilibre de Nash dérivé par induction à rebours. Par ailleurs, si les paiements aux noeuds terminaux sont différents pour chaque joueur, alors cet équilibre est unique.*

Définition 23 (Sous-jeux)**.** *Soit Γ_E un jeux. Un sous-jeux de ce jeux est un sous-ensemble du jeux tel que :*

1. *le sous-jeux commence avec un ensemble d'information qui est un singleton et contient tous les successeurs de ce noeud ;*
2. *tous les ensembles d'information dans le sous-jeux sont complets.*

Définition 24 (Équilibre de Nash en sous-jeux parfait)**.** *Soit Γ_E un jeux. Un équilibre de Nash en sous-jeux parfait (NSP) est un équilibre de Nash qui est un équilibre de Nash dans chaque sous-jeux de Γ_E.*

Proposition 6 (Existence d'équilibre NSP)**.** *Pour tout jeux Γ_E à information complète, il existe au moins un équilibre NSP. Si les paiments de chaque joueurs sont différents à chaque noeud, cet équilibre est unique.*

Proposition 7. *Soit Γ_E un jeux et un T un de ses sous-jeux. Supposons que σ^T est un équilbre NSP dans T et soit $\tilde{\Gamma}_E$ le jeux dans lequel on remplace le sous-jeux par le paiment résultant de σ^T. Alors :*

1. *Les équilibres de NSP de Γ_E doivent l'être aussi pour $\tilde{\Gamma}_E$*
2. *Un équilibre NSP de $\tilde{\Gamma}_E$ auxquel on adjoint σ^T est un équilibre NSP dans Γ_E.*

1.2.7 Croyances et Rationalité séquentielle

Définition 25 (Croyances)**.** *Soit Γ_E un jeux. Un système de croyance est une mesure probabiliste μ sur les ensembles d'information telle que $\sum_{x' \in H(x)} \mu(x') = 1$.*

Définition 26 (Utilité espérée à l'ensemble H)**.** *On définit par $E[\mu_i|, H, \mu, \sigma_i, \sigma_{-i}]$ l'utilité espérée des paiements une fois rendu à l'ensemble d'information H.*

Définition 27 (Stratégie séquentiellement rationnelle)**.** *Soit Γ_E un jeux et μ un système de croyances. Une stratégie σ est dite séquentiellement rationelle a l'ensemble d'information H si pour le joueur qui doit jouer à cet ensemble $\imath(H)$, nous avons*

$$E[u_{\imath(H)}|H, \mu, \sigma_{\imath(H)}, \sigma_{-\imath(H)}] \geq E[u_{\imath(H)}|H, \mu, \sigma'_{\imath(H)}, \sigma_{-\imath(H)}] \; \forall \sigma'_{\imath(H)} \in \Delta(S_{\imath(H)})$$

Pour définir un équilibre de Nash bayesien faiblement parfait il nous faut alors que les stratégies soient séquentiellement rationelles et que les croyances concordent avec les stratégies.

Définition 28 (Équilbre de Nash bayesien faiblement parfait)**.** *Soit Γ_E un jeux et μ un système de croyance. Un profil de stratgéie σ est alors un équilibre de Nash bayesien faiblement parfait (NBFP) si :*

1. *La stratégie est séquentiellement rationnelle étant donné μ.*

2. *Le système de croyance μ est dérivé du profil de stratégie σ par la règle de Bayes lorsque possible ($P(H|\sigma) > 0 \Rightarrow \mu(x') = \frac{P(x'|\sigma)}{P(H|\sigma)}\ \forall x' \in H(x)$)*

Proposition 8. *Soit Γ_E un jeux. Un profil de stratégie σ est un équilibre de Nash si et seulement si il existe un système de croyance μ tel que le profil de stratégie est séquentiellement rationnel pour les ensembles d'information à probabilité non-nulle d'une part et le système de croyance est dérivé de la règle de Bayes lorsque possible d'autre part.*

Définition 29 (Équilibre séquentiel)**.** *Soit Γ_E un jeux. Un profil de stratégie σ et un système de croyances μ est dit un équilibre séquentiel s'il répond aux propriétés suivantes :*

1. *Le profil de stratégie σ est séquentiellement rationnel étant donné μ.*
2. *Il existe une suite de profil de stratégie totalement mixte et de croyances $(\sigma^k, \mu^k) \to (\sigma, \mu)$ telle que μ^k est dérivé du profil de stratégie σ^k et de la règle de Bayes.*

Proposition 9. *Tout équilibre séquentiel est un équilibre de Nash faiblement parfait.*

1.3 Jeux dynamiques