Résumé micro (Incertitude)

Pier-André Bouchard St-Amant*

1 Incertitude

Si nous introduisons de l'incertitude quant aux résultats des choix des agents (l'achat d'actions en bourse, par exemple), comment modéliser le choix des agents ?

Définition 1 (Lotterie simple)**.** *Soit $C := \{1, \ldots, N\}$ l'ensemble des résultats possibles. Une lotterie simple $L \in \ell$ est une mesure probabiliste $(p_1, \ldots, p_N)$ associé à C. ℓ est l'espace de toutes les lotteries possibles.*

Définition 2 (Lotterie composée)**.** *Une lotterie composée $((\alpha_1, L_1), \ldots, (\alpha_k, L_k))$ est une mesure probabiliste sur les lotteries simples $L_1 \in \ell, \ldots, L_k \in \ell$, où α_j est la mesure de la lotterie L_j.*

Définition 3 (Lotterie réduite)**.** *Une lotterie réduite est une mesure probabiliste sur C déduite à partir d'une Lotterie composée :*

$$p_i = \sum_k \alpha_k p_i^k$$

1.1 Axiomes

1. Pour tout consommateur, il existe une relation de préférences $\succeq$ sur ℓ.
2. $\succeq$ est complète et transitive.
3. $L, L', L'' \in \ell$ telle que $L' \succ L \succ L'', \exists \alpha, \beta \in (0,1) : \alpha L' + (1-\alpha)L'' \succ L, L \succ \beta L' + (1-\beta)L''$. (Continuité)
4. $L, L', L'' \in \ell, \alpha \in (0,1), L \succeq L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1-\alpha)L''$ (Indépendance)
5. $L_1, L_2 \in \ell : E[L_1] = E[L_2] \Rightarrow L_1 \sim L_2$. (Un consommateur est indifférent en termes d'espérance mathématiques)

Proposition 1. *Étant donné l'axiome 5, si les préférences sont établies sur les lotteries simples, elles sont alors définies sur toutes les lotteries possibles.*

*bouchard@lse.ac.uk.

1.2 Utilité

Proposition 2. *Étant donné les axiomes 1 et 2, il existe une fonction d'utilité* $u : \ell \to \mathbb{R}$.

Définition 4 (Utilité Von-Neumann Morgenstein)**.** *Soit* $u_1, \ldots, u_n$ *des valeurs d'utilité de chaque résultat possible sur* C. *Une fonction d'utilité* U *est dite Von-Neumann Morgenstein (VNM) si pour chaque lotterie simple* $L \in \ell$, *nous avons que* $U(L) = \int_C u_i d\mu(i) = \sum_i u_i p_i$.

Proposition 3. *Une fonction d'utilité* $U : \ell \to \mathbb{R}$ *est VNM si et seulement si pour toute lotterie composée* $((\alpha_1, L_1), \ldots, (\alpha_k, L_k))$, *nous avons que*

$$U(\sum_i \alpha_i L_i) = \sum_i \alpha_i U(L_i)$$

Proposition 4. *Soit* U *une fonction d'utilité VNM sur* $(\succeq, \ell)$. *Alors* $\tilde{U}$ *est aussi une fonction d'utilité VNM sur* $(\succeq, \ell)$ *si et seulement si il existe des scalaires* $\beta > 0, \gamma$ *tels que*

$$\tilde{U} = \beta U(L) + \gamma \ \forall L \in \ell$$

Proposition 5. *Une fonction d'utilité VNM vérifie les axiomes 1, 2 et 3.*

Lemme 1. *Soit les axiomes 1 et 2 et soit* Λ_i *la lotterie qui assigne une probabilité 1 au résultat* i. *Alors, il existe un* k *tel que* $\Lambda_k \succeq L \ \forall L \in \ell$ *et un* k' *tel que* $\Lambda_{k'} \preceq L \ \forall L \in \ell$.

Proposition 6. *Soit* $X = \mathbb{R}^n$ *et soit* $\succeq$ *une relation de préférences sur* X. *Si nous avons les axiomes suivants :*

1. $\succeq$ *est complète et transitive.*
2. *Pour tout* $x, x', x'' \in X$ *tel que* $x' \succ x \succ x''$, *il existe des scalaires* $\alpha, \beta \in (0,1)$ *tels que*

$$\alpha x' + (1-\alpha)x'' \succ x$$

et

$$x \succ \beta x' + (1-\beta)x''$$

3. *Pour tout* $x, x', x'' \in X$ *et* $\alpha \in (0,1)$, $x \succeq x' \Leftrightarrow \alpha x + (1-\alpha)x'' \succ \alpha x' + (1-\alpha)x''$.
4. *Il existe des* $x_W, x_B \in X$ *tels que pour tout* $x \in X$, $x_B \succeq x \succ x_W$

alors, il existe une fonction d'utilité $U : X \to \mathbb{R}$ *qui représente* $\succeq$ *et qui est tel que pour tout* $x, x' \in X$ *et* $\beta \in [0,1]$, *nous avons*

$$U(\beta x + (1-\beta)x') = \beta U(x) + (1-\beta)U(x')$$

Théorème 1 (Représentation VNM)**.** *Étant donné les axiomes 1, 2 et 3, il existe une représentation* $u_1, \ldots, u_k$ *tel que pour toute lotteries* $L = (p_1, \ldots, p_n) \in \ell$ *et* $L' = (q_1, \ldots, q_n) \in \ell$ *, nous avons :*

1. $L \succeq L' \Leftrightarrow \sum_n p_n u_n \geq \sum_n q_n u_n$
2. *Si* $(u'_1, \ldots, u'_n)$ *est un autre vecteur tel que l'item précédent est valide, alors il existe un scalaire* $\beta > 0$ *et* γ *tel que* $(u'_1, \ldots, u'_n) = \beta(u_1, \ldots, u_n) + \gamma$

1.3 Lotteries monétaires et mesure du risque

Définition 5 (Lotterie monétaire)**.** *Une lotterie est monétaire si $C \subset \mathbb{R}$ représente des quantités monétaires.*

Définition 6 (Lotterie)**.** *Une loterie peut être représentée par par sa distribution cumulée $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ où $F(x) = p(X \leq x)$.*

Dans cette section, nous supposons que les préférences sur les lotteries sont représentées par une fonction VNM

$$U(F) = \int u(x)dF(x)$$

où $u(x)$ est une fonction d'utilité de Bernouilli et u est croissante et continue.

Définition 7 (Aversion au risque)**.** *Un consommateur est averse au risque si*

$$\int u(x)dF(x) \leq u(\int xdF(x))$$

Définition 8 (Neutralité au risque)**.** *Un consommateur est neutre au risque si*

$$\int u(x)dF(x) = u(\int xdF(x))$$

Définition 9 (Amateur de risque)**.** *Un consommateur est amateur de risque si*

$$\int u(x)dF(x) = u(\int xdF(x))$$

Proposition 7. *Un consommateur est averse au risque (amateur de risque) si et seulement si u est concave (convexe).*

Définition 10 (Équivalent certain)**.** *On définit l'équivalent certain $c(F, u)$ implicitement par*

$$u(c(F, U)) = \int u(x)dF(x)$$

Proposition 8. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *u est concave (convexe).*
2. *$c(F, u) \leq (\geq) \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)\ \forall F$*
3. *Le consommateur est averse au risque (amateur de risque).*

Définition 11 (Coefficient d'aversion pour le risque)**.** *Soit u deux fois différentiables. Le coefficient d'aversion absolue pour le riques (Arrow-Pratt) au point x est*

$$r_a(x) = -\frac{u''(x)}{u(x)}$$

.

Théorème 2. *Soit u_1, u_2 deux fonctions d'utilité de type bernouilli. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $r_A(x, u_1) \geq r_a(x, u_2)\ \forall x$
2. *Il existe un fonction croissante et concave ψ telle que $u_1(x) = \psi(u_2(x))\ \forall x$*
3. $c(F, u_1) \leq c(F, u_2)\ \forall F$

1.3.1 Comparaison de distributions

Définition 12 (Dominance stochastique de premier ordre)**.** *On dit que F domine stochastiquement G en premier ordre si $\forall u$ qui n'est pas décroissante,*

$$\int_C u(x)dF(x) \geq \int_C u(x)dG(x)$$

Proposition 9. *F domine stochastiquement G en premier ordre si $F(x) \leq G(x)\ \forall x$*

Définition 13 (Dominance stochastique d'ordre deux)**.** *Soit F, G deux distributions telles que les deux sont stochastiquement équivalentes au premier ordre. Alors F domine stochastiquement G en deuxième ordre si pour toute fonction u concave et non-décroissante*

$$\int_C u(x)dF(x) \geq \int_C u(x)dG(x)$$

Proposition 10. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *F domine stochastiquement G en second ordre.*
2. *G est une fonction "dispersive" qui préserve la moyenne de F.*
3. $$\int_C \mathbb{1}_{t \leq x} F(t)dt \leq \int_C \mathbb{1}_{t \leq x} G(t)dt\ \forall x \in C$$

1.4 Probabilités subjectives

Définition 14 (Ensemble des états)**.** $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ *est l'ensemble des états possibles du consommateur.*

Définition 15 (Acte)**.** *Un acte est une fonction* $f : \Omega \to \ell$ *qui associe un état à une loterie.* Φ *désigne la classe des actes.*

Définition 16 (Acte mélangé)**.** *Un acte mélangé est une mesure probabiliste finie* $g : \Phi \to [0,1]$ *tel que* $g(f) > 0$ *seulement pour un nombre finie d'actes. L'ensemble des actes probables tels que* $g(f) > 0$ *est* $P_g := \{f \in \Phi, g(f) > 0\}$

Définition 17 (Acte réduit)**.** *Un acte réduit est défini par*

$$f(\omega) := \left(\sum_{f' \in P_g} f'(\omega) g(f') \right)$$

Définition 18 (Acte constant)**.** *Un acte constant* $f(\bar{\omega})$ *est un acte qui spécifie la loterie* $f(\omega)$ *pour tout état.*

1.4.1 Axiomes des probabilités subjectives

1. Pour tout consommateur, il existe une relation de préférences $\succeq$ sur ℓ.
2. $\succeq$ est complète et transitive.
3. $f, f', f'' \in \Phi$ telle que $f' \succ f \succ f'', \exists \alpha, \beta \in (0,1) : \alpha f' + (1-\alpha) f'' \succ f, f \succ \beta f' + (1-\beta) f''$. (Continuité)
4. $f, f', f'' \in \Phi, \alpha \in (0,1), f \succeq f' \Leftrightarrow \alpha f + (1-\alpha) f'' \succeq \alpha f' + (1-\alpha) f''$ (Indépendance)
5. $\forall f, g \in \Phi, f(\bar{\omega}) \succeq g(\bar{\omega})\ \forall \omega \Rightarrow f \succeq g$
6. $\exists f, g \in \Phi : f \succ g$
7. $f_1, f_2 \in \Phi : E[f_1] = E[f_2] \Rightarrow f_1 \sim f_2$.

Théorème 3. *La relation de préférence qui satisfait les axiomes précédents si et seulement si il existe une unique distribution de probabilité* $(\pi_1, \ldots, \pi_k)$ *sur* Ω *et une fonction d'utilité VNM* $U : \ell \to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$f \succeq f' \Leftrightarrow \sum_{\omega_k \in \Omega} \pi_k U(f(\omega_k)) \geq \sum_{\omega_k \in \Omega} \pi_k U(f'(\omega_k))$$