Encan*

Pier-André Bouchard St-Amant

1 Encan

1. Un seul vendeur, n acheteurs. Un seul objet à vendre. L'objet n'a aucune valeur aux yeux de l'acheteur.
2. Chaque vendeur à son évaluation personnelle $v_i \in [0,1]$ de l'objet. Cette évaluation est tiré d'une distribution statistique F_i connue de tous. Les tirages (les v_i) sont indépendants.
3. p est le prix de vente (déterminé par l'encan). Si i gagne l'objet, son gain est de $v_i - p$. S'il perd, il obtient 0.

1.1 Encan au premier prix (scellé)

1. Chaque acheteur potentiel inscrit sa mise b_i sur un papier. La plus haute mise gagne l'objet.
2. Pour fin de simplicité, nous supposons que $F_i = F \ \forall i$.
3. Quelle est la stratégie optimale $b^*(v_i)$ pour chaque individus ?
4. Nous nous concentrons uniquement sur les stratégies croissante en v_i.
5. Un acheteur qui mise la valeur r, mais qui estime l'objet à la valeur v_i aura comme valeur espérée :

$$u(r,v) = F(r)^{n-1}(v_i - b^*(r))$$

*Il reste quelques définitions à formaliser.

en équilibre, cette valeur doit être maximale :

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{r=v} &= 0 \\
\Rightarrow (n-1)F(v)^{n-2}f(v)b^*(v) + F(v)^{n-1}b^{*'}(v) &= (n-1)vf(v)F(v)^{n-2} \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial v}\left[F(v)^{n-1}b^*(v)\right] &= (n-1)vf(v)F(v)^{n-2} \\
\Rightarrow F(v)^{n-1}b^*(v) &= (n-1)\int_0^v xf(x)F(x)^{n-2}dx \\
\Rightarrow b^*(v) &= \frac{(n-1)}{F(v)^{n-1}}\int_0^v xf(x)F(x)^{n-2}dx
\end{aligned}
$$

1.2 Encan hollandais

Le prix p commence à 1 et descend à vitesse régulière. Le premier qui dit stop gagne l'objet au prix p.

L'encan est similaire au prix scellé (mais jouée à l'envers). En conséquence, la stratégie est la même que précédemment (dans les mêmes conditions).

1.3 Encan au deuxième prix

1. On revient au général ($F_i \neq F_j$).
2. Chacun soumet sa mise b_i. La plus haute mise remporte l'objet et paye la deuxième plus haute mise.

Proposition 1. $b^*(v_i) = v_i$ *est la seule stratégie faiblement dominante.*

Démonstration. Soit b_{-i} le vecteur des mises des autres joueurs et $B := \max b_{-i}$. Le joueur i a donc l'utilité :

$$
u(b_i, B) = \begin{cases} 0 & \text{si } b_i < B \\ v_i - B & \text{si } b_i \geq B \end{cases}
$$

Ainsi, il préfère $v_i - B$ si $v_i - B > 0$. Donc, s'il mise $b_i = v_i$, il obtient $v_i - B > 0$ s'il gagne et il obtien $0 > v_i - B$ s'il perd. En conséquence, c'est une stratégie faiblement dominante.

Pour montrer que c'est l'unique, supposons que $\tilde{b}_i$ est une autre stratégie dominante. Si $\tilde{b}_i > v_i$, il existe une mise intermédiaire entre $\tilde{b}_i$ et v_i telle que la valeur espérée du joueur est améliorée. Ce n'est donc pas une stratégie dominante. Si $\tilde{b}_i < v_i$, on obtient le même résultat. En conséquence $\tilde{b}_i = v_i$. □

1.4 Encan anglais

1. p augmente régulièrement avec le temps.
2. Les mises sont automatiques. Chaque acheteur i peut se retirer des mises en pressant un bouton.
3. L'avant dernier acheteur qui se retire détermine alors le prix de vente p (qui arrête d'augmenter).

Proposition 2. *L'unique stratégie dominante de l'encan anglais est d'arrêter de miser quand* $p = v_i$.

Démonstration. Supposons que i quitte alors que $p < v_i$. Si tous les joueurs quittent avant d'avoir $p = v_i$, il est strictement perdant. En conséquence, il est mieux d'attendre $p = v_i$.

Inversement, s'il attend pour une valeur $p > v_i$ et qu'il gagne, il obtient $v_i - p < 0$ et est en pire situation que s'il s'était retiré à $p = v_i$. □

1.5 Équivalence du revenus

Nous pouvons remarquer que les deux premier types d'encan mènent forcément au même revenus pour le vendeur. Similairement, les deux derniers types mènent à des revenus similaires. Peut-on que affirmer que les revenus des deux premiers est égal au revenus des deux derniers ?

Proposition 3. *Le revenu espéré du vendeur est le même dans les quatre formats d'encan.*

Démonstration. Dans le cas du premier type, le vendeur peut espérer le revenu :

$$R_1 = \int_0^1 b^*(v)g(v)dv$$

Où $g(v)$ est la densité de $\max_i v_i = nf(v)F(v)^{n-1}$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
R_1 &= n\int_0^1 b^*(v)f(v)F(v)^{n-1}dv \\
&= n\int_0^1 \frac{n-1}{F(v)^{n-1}}\int_0^v xf(x)F(x)^{n-2}dxf(v)F(v)^{n-1}dv \\
&= \dots \\
&= n(n-1)\int_0^1 xf(x)F(x)^{n-2}(1-F(x))dx
\end{aligned}$$

Dans le cas du deuxième type d'encan, nous avons :

$$R_2 = \int_0^1 b^*(v)h(v)dv$$

où $h(v)$ est la densité de la deuxième plus haute mise (v_{2e}). Nous avons $P(v_{2e} \leq v) = F(v)^n + nF(v)^{n-1}(1-F(v))$ et donc que $h(v) = n(n-1)\int_0^1 vF(v)^{n-2}f(v)(1-F(v))dv$. Il s'en suit alors que :

$$R_2 = n(n-1)\int_0^1 vF(v)^{n-2}f(v)(1-F(v))dv$$

Il s'en suit que $R_1 = R_2$. □

2 Théorème d'équivalence de revenus

Définition 1 (Fonction de probabilité de gain)**.** *Une fonction de probabilité de gain est implicitement définie par son image* $p_1(v_1, \ldots, v_n), \ldots, p_n(v_1, \ldots, v_n$ *de manière à ce que* $\sum_i p_i \leq 1$. *Elle assigne la probabilité que i remporte l'objet à vendre.*

Définition 2 (Fonction de coûts)**.** *Ce qui est payé par le joueur i :* $c_i(v_1, \ldots, v_n)$.

Définition 3.

$$\bar{p}_i(r_i) = \underbrace{\int_0^1 \ldots \int_0^1}_{n-1} p_i(r_i, v_{-1})f_{-1}(v_{-i})dv$$

$$\bar{c}_i(r_i) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 c_i(r_i, v_{-1})f_{-1}(v_{-i})dv$$

Définition 4 (Compatibilité aux incitatifs (CI))**.** *Un mécanisme est compatible aux incitatifs si* $u_i(v_i, v_i) \geq u_i(r_i, v_i)\ \forall i, r_i, v_i$.

Proposition 4 (Conditions nécessaires et suffisantes pour CI.)**.** *Un mécanisme est compatible aux incitatifs ssi :*

1. $\bar{p}_i(v_i)$ *est non décroissante en* v_i.
2. $\bar{c}_i(v_i)$ *peut s'écrire :*

$$\bar{c}_i(v_i) = \bar{c}_i(0) + \bar{p}_i(v_i)v_i - \int_0^{v_i} \bar{p}_i(x)dx$$

Sketch de preuve.

1. Soit $v' < v''$ et supposons que $\bar{p}_i(v') > \bar{p}_i(v'')$. Les CI impliquent que :
$$\begin{aligned} & u_i(v', v') \geq u_i(v'', v') \\ & u_i(v'', v'') \geq u_i(v', v'') \\ \Rightarrow \quad & u_i(v'', v'') + u_i(v', v') \geq u_i(v', v'') + u_i(v'', v') \\ \Rightarrow \quad & \bar{p}_i(v')v' + \bar{p}_i(v'')c'' \geq \bar{p}_i(v')v'') + \bar{p}_i(v'')v' \\ \Leftrightarrow \quad & (\bar{p}_i(v'') - \bar{p}_i(v'))(v'' - v') \geq 0 \end{aligned}$$
ce qui implique le résultat.
2. Notons que les CI impliquent que
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=v} = 0 \forall v$$
et puisque
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \bar{p}_i'(r)v - \bar{c}_i'(r)$$
nous avons que
$$\bar{p}_i'(v)v = \bar{c}_i'(v) \ \forall v$$
$$\Rightarrow \bar{c}_i(v) - \bar{c}_i(0) = p_i(v)v - \int_0^v p_i'(x)dx$$
ce qui correspond à la seconde affirmation.

□

Théorème 1 (Théorème d'équivalence du revenu)**.** *Si deux mécanismes de vente directs respectant les CI ont la même fonction de probabilité de victoire et que chaque acheteur potentiel est indifférent entre les mécanismes, alors les mécanismes génèrent le même revenu.*

Démonstration. Puisque les valeurs v sont indépendantes, le revenu espéré peut s'écrire :
$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \bar{c}_i(v_i) f_i(v_i) dv_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left(\bar{c}_i(0) + \bar{p}_i(v_i)v_i - \int_0^{v_i} \bar{p}_i(x)dx \right) f_i(v_i) dv_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\bar{c}_i(0) + \int_0^1 \left(\bar{p}_i(v_i)v_i - \int_0^{v_i} \bar{p}_i(x)dx \right) f_i(v_i) dv_i \right] \end{aligned}$$

Nous remarquons que le revenu dépend seulement de $\bar{c}_i(0)$ et de $\bar{p}_i$. □