Résumé micro (Équilibre général)

Pier-André Bouchard St-Amant*

1 Aggrégation

Quelles restrictions doit-on faire pour que les résultats individuels tiennent au niveau agrégé ?

1.1 Demande agrégée

Définition 1 (Revenu total)**.** *Le revenu total* (M) *des* K *individus dans l'économie est de* $M := \sum_{i=1}^{K} m^i$ *où* m^i *est le revenu individuel.*

Définition 2 (Marshallienne agrégée)**.** $X(p, m_1, \ldots, m_k) := \sum_i^K x^i(p, m^i)$*. En conséquence* x^i_j *désigne le* j*ème bien de consommation de la* i*ème personne.*

Définition 3 (Fonction redistributive)**.** *Soit* $M := [m^1, \ldots, m^k]' \in \mathbb{R}^k_+$ *une allocation quelconque. Une redistribution est une fonction* $R : M^1 \in \mathbb{R}^k_+ \rightarrow M^2 \in \mathbb{R}^k_+$ *telle que* $\sum_i m^{1i} = \sum_i m^{2i}$*.*

Proposition 1. *Soit* R *une fonction redistributive et* $M^1 \in R^k_+$ *une allocation de revenu. Alors* $X(p, M^1) = X(p, R(M^1)) \Leftrightarrow \frac{\partial x^i_l(p,m_i)}{\partial m^i} = \frac{\partial x^j_l(p,m_i)}{\partial m^j}$ $\forall l, i, j$*.*

Démonstration. Nous avons :

$$X(p, M^1) = X(p, R(M^1))$$
$$\Leftrightarrow \sum_i^K \frac{dx^i(p, m^i)}{dm^i} dm^i = \sum_i^K \frac{dx^i(p, R(m^i))}{dm^i} dR(m^i) = 0$$

Par la définition de R, nous avons que :

$$M^1 = \sum_i m^{1i} = \sum_i R(m^{1i}) = R(m^1)$$
$$\Leftrightarrow dM^1 = 0 = \sum_i dm^{1i} = \sum_i dR(m^{1i}) = dR(m^1)$$

*bouchard@lse.ac.uk.

Il s'en suit alors le résultat énoncé. □

L'effet revenu doit-être identique pour chaque individu.

Définition 4 (Préférences homothétiques)**.** *Soit $\mathcal{G}$ la classe des fonctions d'utilité homogène de degré un. Alors, une fonction d'utilité est dite homothétique si elle constitue une transformation monotone des fonctions membres de $\mathcal{G}$.*

Proposition 2. *Des consommateurs aillant des fonctions d'utilité similaires à une homothétie près ont des effets revenus identiques.*

Démonstration. Soit x^{1*}, x^{2*} des solutions à des fonctions d'utilité $f(u(x)), g(u(x)) \in \mathcal{G}$ sujet à $x \in B(p, m^i)$. Nous savons que f, g sont croissantes et monotones. Il s'en suit que x^{1*}, x^{2*} sera solution à $f(u(x)), g(u(x))$ si et seulement si elles sont également solution de $u(x)$. Or, puisque cette fonction est homogène de degré un, nous avons que $u(tx) = tu(x)$ et donc que la solution n'est qu'un multiple d'une autre solution, selon la taille de l'ensemble budgétaire. Il s'en suit alors que l'effet revenus est identique pour chaque consommateur. □

1.2 Utilité agrégée

Définition 5 (Utilité indirecte agrégée)**.** $V(p,m) := \sum_i^K v_i(p,m)$ *où v_i désigne l'utilité indirecte de chaque individu.*

Définition 6 (Forme de Gorman)**.** *Une fonction d'utilité est dite de forme de Gorman si sa forme indirecte peut-être représentée par $v_i(p, m_i) := a_i(p) + b(p)m_i$.*

Proposition 3. *Soit K consommateurs aillant une utilité indirecte de forme de Gorman $v_i(p, m_i) := a_i(p) + b(p)m_i$. Alors :*

1. *la demande agrégée ne dépend que du revenu total ;*
2. *la fonction de dépense du consommateur j est*

$$e_j(p, \bar{u}_i) := -\frac{-a_j(p)}{b(p)} + \frac{\bar{u}_j}{b(p)} := f_j(p) + g(p)\bar{u}_j$$

3. *La demande hicksienne pour le consommateur j est*

$$h_i^j(p, \bar{u}_j) := \frac{\partial f_j(p)}{\partial p_i} + \frac{\partial g(p)}{\partial p_i}\bar{u}_j$$

4. *La demande hicksienne aggrégée est invariante aux redistributions d'utilité.*
5. *L'équation de Slutsky est vérifiée pour la demande hicksienne aggrégée.*

Démonstration.

1. L'effet revenu est identique pour chaque consommateur. De la première proposition, nous avons le résultat.
2. Nous savons $v(p, e(p\bar{u})) = \bar{u}$. De la forme de Gorman, on tire que $a_i(p)+b(p)e_i(p, \bar{u}) = \bar{u}$, ce qui implique le résultat.
3. Découle du Lemme de Sheppard.
4. Découle de la linéarité des hicksiennes en $\bar{u}$.
5. La preuve est alors similaire à la preuve originale de l'Équation de Slutsky en aggrégeant les hicksiennes et les marshaliennes (voir les notes sur le consommateur).

□

Proposition 4. *Si tous les consommateurs ont des préférences homothétiques identiques ou s'ils ont tous des préférences quasi-linéaires dans le même bien de consommation, alors les fonctions d'utilité indirectes satisfont la forme de Gorman.*

Démonstration. À faire. □

Théorème 1. *Soit p^0, p^1 deux vecteurs de prix différents et soit*

$$V(p, m) := \sum_i^k a_i(p) + b(p)m_i := a(p) + b(p)M$$

telle que

$$a(p^1) + b(p^1)M - a(p^0) - b(p^0)M := c > 0$$

alors il existe une fonction redistributive R sur le revenu telle que l'utilité de tous est améliorée.

Démonstration. À faire. □

1.3 Production agrégée

C'est beaucoup plus simple d'agréger du côté de la production.

Définition 7. *(Plan de production agrégé et simplifié) Soit J le nombre de firmes et supposons que $Z^j = Z$ (le plan de production de chaque firme est identique). Le plan de production simplifié est alors :*

$$(y(p_y, w), -x(p_y, w)) := \sum_i^J (y^j(p_y, w), -x^j(p_y, w))$$

Corrolaire 1. *La matrice des dérivées secondes (hessienne) du plan de production simplifié est symétrique et positive semi-définie.*

Démonstration. Il suffit de réaliser que la somme de matrices positive semi-définie est également définie semi-positive. □

Définition 8 (Profits agrégés)**.** *Soit $\pi^j(p_y, w)$ le profit de la firme j. Le profit agrégé est*

$$\pi(p_y, w) := \sum_i^J \pi^j(p_y, w)$$

Proposition 5. *Les propriétés de la fonction de profit de chaque firme s'appliquent aussi à la fonction de profit agrégée et simplifiée.*

Démonstration. Découle de la linéarité des propriétés de la fonction de profit. Par exemple, si g, f sont des fonctions convexes, leur somme est également convexe. □

Imaginons maintenant une seule "firme négligeable".

Définition 9 (Plan de production total)**.** *Soit Z^j le plan de production de la firme j. Alors $Z^* := \{z \in \mathbb{R}^L : z = \sum_{j=1}^J, z^j \in Z^j\}$ est le plan de production total.*

Définition 10 (Profits total et plan total de production optimale)**.** *Le profit de la firme définie (implicitement) à la précédente définition a un profit $\pi^*(p_y, w)$ et un plan de production optimal $(y^*(p_y, w), -x^*(p_y, w)) \in Z^*$*

Théorème 2.

1. $\pi^*(p_y, w) = \pi(p_y, w)$
2. $(y^*(p_y, w), -x^*(p_y, w)) = (y(p_y, w), -x(p_y, w))$

Démonstration.

1. On peut affirmer que cela découle immidiatement de l'orthogonalité des plans de production. Voici une preuve qui exploite cet argument : $Z^j \subset Z^* \Rightarrow \pi(p_y, w) \leq \pi^*(p_y, w)$. D'un autre côté, nous avons que pour tout $(y, -x) \in Z^*$, $p_y y - w \cdot x = \sum_{j=1}^J (p_y y^j - w \cdot x^j \leq \pi(p_y, w), (y^j, -x^j) \in Z^j$. Le résultat s'en suit en combinant les inégalités.
2. Découle de l'item précédent et de l'unicité du plan de production optimal de la firme. □

Notez que ces résultats tiennent seulement si les plans de productions sont dépendants. Si ce n'est pas le cas, nous pouvons avoir des effets de grappe ou des externalités de marché.

2 Équilibre compétitif

Nous avons défini le consommateur et la consommation. Nous avons également défini la production de biens de consommation. Il nous faut maintenant définir les mécanismes de transferts de la production à la consommation : l'échange.

Commençons d'abord par une pure économie d'échange (sans production). Nous reviendrons plus tard à une économie de consommation et de production.

2.1 Économie d'échange

Le consommateur $i \in \{1, \ldots, K\}$ possède une fonction d'utilité u^i. Nous supposons que les demandes marshalliennes sont uniques et consomme des produits d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n_+$ (l'espace des produits disponibles).

Définition 11 (Allocation initiale)**.** *L'allocation initiale du consommateur i est $\omega^i := [\omega^i_1, \ldots, \omega^i_n]'$.*

Définition 12 (Fonction allocative, allocation realisable)**.** *Une fonction allocative est une fonction $A : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+ \times \{1, \ldots, K\}$. Une allocation est réalisable si et seulement si A respecte $\sum_{i=1}^k x^i_j \leq \omega_j \ \forall j$.*

Définition 13 (Revenu d'échange)**.** *Le consommateur i a un revenu $m_i := p \cdot \omega^i$.*

Définition 14 (Surplus de demande du consommateur)**.**

$$z^i(p) := \begin{bmatrix} x^i_1(p, p \cdot \omega^i) - \omega^i_1 \\ \ldots \\ x^i_n(p, p \cdot \omega^i) - \omega^i_n \end{bmatrix}$$

Définition 15 (Surplus de demande agrégé)**.**

$$z(p) := \begin{bmatrix} \sum_i^K \left(x^i_1(p, p \cdot \omega^i) - \omega^i_1 \right) \\ \ldots \\ \sum_i^K \left(x^i_n(p, p \cdot \omega^i) - \omega^i_n \right) \end{bmatrix}$$

Proposition 6. *$z(p)$ est homogène de degré zéro.*

Démonstration. Découle directement de l'homogénéité des demandes marshaliennes. □

Définition 16. *(Équilibre Walrasien) Un équilibre Walrasien est une paire $(\bar{x}, \bar{p})$, soit une allocation réalisable et un vecteur de prix dit d'équilibre tel que :*

1. $\bar{x}^i = x^i(\bar{p}, \bar{p} \cdot \omega^i) \ \forall i$
2. $z_j(\bar{p}) \leq 0, \forall j$

Corrolaire 2. *Si $\bar{p}$ est un prix d'équilibre, $t\bar{p}, t \in \mathbb{R}_+$ est aussi un prix d'équilibre.*

Démonstration. Découle directement de la proposition précédente. □

Sans perte de généralité, nous allons normaliser les prix de manière à ce que

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{p}_j = 1$$

. Notons que l'ensemble

$$S := \left\{ p \in \mathbb{R}^n_+ : p \geq 0, \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\}$$

est convexe et compact.

Théorème 3. *(Loi de Walras) Supposons l'ASL. Alors, nous avons :*

1. $p \cdot x^i(p, p \cdot \omega^i) = p \cdot \omega^i \ \forall i$
2. $p \cdot z^i(p) = 0 \ \forall i$
3. $p \cdot z(p) = 0$

Démonstration. 1. Découle de la proposition 5 des notes de cours.

2. Découle de l'item précédent.
3. Découle de l'item précédent et par la définition de $z(p)$.

□

Proposition 7. *Supposons que nous avons l'ASL. Alors, nous avons :*

1. *Si p est strictement plus grand que zéro et $z_j(p) = 0 \ \forall j \in \{1, \ldots, n-1\}$, alors $z_n(p) = 0$.*
2. *Si $\bar{p}$ est un vecteur de prix d'équilibre Walrasien, $z_j(\bar{p}) < 0 \Rightarrow \bar{p}_j = 0$.*
3. *Si $\bar{p}$ est un vecteur de prix d'équilibre Walrasien, $\bar{p}_i > 0 \Rightarrow z_i(\bar{p}) = 0$.*

Démonstration. 1. Découle de l'item deux (ou trois) de précédent théorème.

2. Puisque par définition, $z_j(\bar{p}) \not> 0$, cela découle du précédent théorème.
3. Puisque par définition, $z_j(\bar{p}) \not> 0$, cela découle du précédent théorème.

□

Définition 17 (Point fixe)**.** *Soit une fonction $F : X \to X$, où $X \subset \mathbb{R}^n$. Un point x^* tel que $F(x^*) = x^*$ est appelé un point fixe de F.*

Théorème 4 (Point fixe de Brouwer)**.** *Soit $F : X \to X, X \subset \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $X \neq \emptyset$, convexe et compact. Alors F admet au moins un point fixe.*

Démonstration. À faire. $\square$

Théorème 5. *Soit $z : S \to \mathbb{R}^n_+$ un vecteur de surplus de fonctions de demandes agrégées telles que :*

1. *$z(p)$ est continue,*
2. *$p \cdot z(p) = 0 \ \forall p$,*

alors, il existe un vecteur de prix p^* tel que $z(p^*) \leq 0$.

Démonstration. Supposons que $z(p) \neq 0$ (sinon, il n'y a rien à prouver). Nous savons qu'en travaillant sur

$$S := \left\{ p \in \mathbb{R}^n_+ : p \geq 0, \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\}$$

nous ne perdons rien en généralité (par le corrolaire 2). Cet ensemble est convexe et compact. Clairement, cet ensemble est non vide également.

Définissons $z_i^+ := \max(0, z_i(p)) \ \forall i \in \{1, \dots n\}$, $q(p) := \sum_{i=1}^{n} (z_i^+(p) + p_i)$ et

$$f(p) := \frac{1}{q(p)} \begin{bmatrix} z_1^+(p) + p_1 \\ \dots \\ z_n^+(p) + p_n \end{bmatrix}$$

Cette fonction $f := S \to S$ est continue (puisque les z sont continus). Il s'en suit qu'elle possède un point fixe p^*. Puisque nous avons $p \cdot z(p) = 0 \ \forall p$ par hypothèse, il s'en suit que

$$\begin{aligned} 0 = f(p^*) \cdot z(p^*) &= \frac{1}{q(p^*)} \sum_{i=1}^{n} (z_i^+(p^*) + p_i^*) z_i(p^*) \\ 0 &= \frac{1}{q(p^*)} \sum_{i=1}^{n} z_i^+(p^*) z_i(p^*) \end{aligned}$$

Par définition, ceci implique que $z_i(p^*) \leq 0 \ \forall i$, ce qui complète la preuve. $\square$

2.2 Économie de production

Dans cette section, nous ajoutons J firmes avec chacunes un plan de production Z^j qui est fermé et non-vide. Nous supposons également que la firme j appartient en proportion θ^{ij} au consommateur i.

Définition 18 (Allocation de production, allocation réalisable)**.** *Une allocation* $(x, z) := (x^1, \ldots, x^K, z^1, \ldots, z^J)$ *est une spécification de consommation de chaque bien pour chaque consommateur et un plan de production pour chaque firme. Une allocation est réalisable si*

$$\sum_{i=1}^{K} x^i \leq \sum_{i=1}^{K} \omega^i + \sum_{j=1}^{J} z^j$$

Définition 19 (Équilibre compétitif)**.** *Un équilibre compétitif est un triplet* $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{p})$*, soit une allocation d'équilibre et un prix d'équilibre tel que :*

1. $(\bar{x}, \bar{z})$ *est réalisable.*
2. *Pour tout* $j, \bar{p}\bar{z}^j \geq \bar{p}z^j \ \forall z^j \in Z$.
3. *Pour tout* $i, u^i(\bar{x}^i) \geq u^i(x^i)$ *pour tout* x^i *tel que* $p \cdot x^i \leq p \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta^{ij} p \cdot \bar{z}^j$

Théorème 6 (Existence de prix d'équilbre)**.** *Si les fonctions d'offres et de demandes sont uniques, continues et convexes, il existe un vecteur de prix d'équilibre.*

Démonstration. À faire. □

2.3 Efficience

Définition 20 (Pareto efficience)**.** *Une allocation* $(\bar{x}, \bar{z})$ *est Pareto efficiente si et seulement si :*

1. *Elle est réalisable.*
2. *Il n'existe pas d'autre allocation* $(\hat{x}, \hat{z})$ *telle que :*
   (a) $\exists j : u^i(\hat{x}^j) > u^j(\bar{x}^j)$
   (b) $u^i(\hat{x}^j) \geq u^j(\bar{x}^j) \ \forall j$

Théorème 7 (Premier théorème du bien-être)**.** *Supposons que les préférences des consommateurs satisfont l'ASL. Alors, n'importe quel équilibre compétitif est Pareto efficient.*

Démonstration. Soit $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{p})$ un équilibre compétitif (faisable par définition). Nous devons montrer qu'il n'existe pas d'allocation réalisable $(\hat{x}, \hat{z})$ telle que :

1. $u^i(\hat{x}^i) \geq u^i(\bar{x}^i) \ \forall i$
2. $\exists i : u^i(\hat{x}^i) > u^i(\bar{x}^i)$

Nous le faisons par contradiction. Supposons que $(\hat{x}, \hat{z})$ existe. Alors, le premier élément et l'ASL impliquent que $\bar{p} \cdot \hat{x}^i \geq \bar{p} \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta^{ij} \bar{p} \cdot \bar{z}^j$. (Sinon, par l'ASL, on peut trouver un x moindres qui contredirait l'optimalité de $\bar{x}^i$)

Le second élément implique que $\bar{p} \cdot \hat{x}^i > \bar{p} \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{J} \theta^{ij} \bar{p} \cdot \bar{z}^j$ pour au moins un i. Il s'en suit que $\sum_i \bar{p} \cdot \hat{x}^i > \sum_i \bar{p} \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{J} \bar{p} \cdot \bar{z}^j$. Puisque $\bar{z}^j$ est optimal, nous avons que $\sum_i \bar{p} \cdot \hat{x}^i > \sum_i \bar{p} \cdot \omega^i + \sum_{j=1}^{J} \bar{p} \cdot \hat{z}^j$ également, ce qui contredit la faisabilité de $(\hat{x}, \hat{z})$. □

Notez que les conditions d'équilibre compétitif supposent notamment une compétition parfaite, l'absence d'externalités et une parfaite information.

Théorème 8 (Second théorème du bien-être)**.** *Soit une allocation Pareto efficiente* $\bar{x}$ *pour une économie d'échange. Supposons l'existence d'un équilibre compétitif* $(\hat{x}, \hat{p})$ *lorsque* $\omega^i = \bar{x}^i \ \forall i$. *Alors,* $(\bar{x}, \hat{p})$ *est un équilibre compétitif.*

Démonstration. Puisque $\bar{x}^i$ est dans $B^i(\bar{p}, \bar{p} \cdot \bar{x}^i)$, nous avons que

$$u^i(\hat{x}^i) \geq u^i(\bar{x}^i) \ \forall i$$

Puisque $\bar{x}$ est Pareto efficient, nous avons que

$$u^i(\hat{x}^i) = u^i(\bar{x}^i) \ \forall i$$

Il s'en suit alors que $\bar{x}^i$ est optimal étant donné $\hat{p}$. $\square$

Définition 21 (Problème de maximisation d'une économie)**.** *Choisir (x, z) de manière à maximiser* $u^1(x^1)$ *sujet aux contraintes*

$$u^i(x^i) \geq u^i(\bar{x}^i) \ \forall i \neq 1$$

$$\sum_{i=1}^{K} x^i \leq \sum_{i=1}^{K} \omega^i + \sum_{j=1}^{J} z^j$$

$$z^j \in Z^j \ \forall j$$

Proposition 8. *Supposons que les préférences des consommateurs sont continues et satisfont la monotonicité forte. L'allocation* $(\bar{x}, \bar{z})$ *est Pareto efficiente si et seulement si elle est solution au problème de maximisation précédent.*

Démonstration. À faire. $\square$