# Résumé Macro (croissance endogène)

Pier-André Bouchard St-Amant*

## 1 Modèles de R&D

1. Objectif : expliquer les déterminants de la croissance économique.
2. Deux types d'innovation : variété dans les produits et processus d'innovation.

### 1.1 Modèle de variété

1. Le côté consommateur est similaire à Ramsey.
2. $n = 0$ (pas de croissance de population).
3. Deux niveau de production : production finale (pour consommation) et production intermédiaire (pour produire le bien final). La variété est dans les biens intermédiaires.
4. Le bien final est produit par une fonction
$$Y = AL^{1-\alpha} \int_{j=0}^{N} (X_j)^\alpha dj$$
où $X_j$ représente un bien intermédiaire (tiré d'une infinité).
5. On s'intéresse à l'effet de $N$ (sa croissance) sur la production. Pour autant que les prix ne soient pas infinis, une telle fonction de production demandera toujours une quantité positive de chaque biens.
6. Le secteur de production final est parfaitement compétitif. Donc :
$$L(w) = \left[\frac{(1-\alpha)A\int X_j^\alpha}{w}\right]^{1/\alpha}$$
$$X_j(P_j) = \left[\frac{\alpha A L^{1-\alpha}}{P_j}\right]^{1/(1-\alpha)}$$
où $P_j$ est le prix du bien intermédiare $j$.

*bouchard@lse.ac.uk.

## 1.2 Les produits intermédiaires

1. Il faut spécifier la technologie de production des biens intermédiaires existants, la technologie pour inventer des biens intermédiaires et le marché des biens intermédiaires.
2. Technologie de production des biens existants :
   (a) Une unité du bien final produit une unité du bien intermédiaire.
   (b) Les biens intermédiaires sont non-durables.
3. Technologie de production des nouveaux produits :
   (a) Coût de production d'un bien intermédiaire : $\eta$.
4. Structure de marché des biens intermédiaires :
   (a) Incitatif à l'innovation : brevets perpétuels.
5. Les potentiels investisseurs dans les marchés intermédiaires font une évaluation coût bénéfice. Il faut savoir les quantités vendues et le prix de vente. Flot de profit du produit $j$ :
   $$\pi_j = P_j X_j(P_j) - X_j(P_j)$$
   où $X_j(P_j)$ est l'équation dérivée plus haut. Par une maximisation standard, on trouve que $P_j = \frac{1}{\alpha}$.
6. Puisque $0 < \alpha < 1$, on a que les profits ne sont pas nuls et il n'y a pas d'efficience économique (pareto amélioration possible).
7. En substituant, on obtient que
   $$X_j = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} L$$
   et en substituant dans la fonction de profit, on a que
   $$\pi_j L A^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\alpha} \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} := \pi$$
   On remarque que le profit ne dépend pas du produit en tant que tel (aucun indice $j$) et donc que le profit est identique pour chaque firme.
8. On remarque qu'avoir un brevet est l'équivalent d'avoir un actif qui paie $\pi$ à chaque période. Le coût d'achat de cet actif est de $\eta$.
9. Alternativement, l'investisseur pourrait prêter cet argent (au taux $r(t)$). Ainsi, pour avoir un nombre fini et positif de firme, il faut avoir l'égalité
   $$\eta = \int_t^{\infty} \pi \exp\{-\int_t^v r(z)dz\} dv$$
   La valeur actualisée des profits doit être égale au coût d'investissement. Si $\eta$ est plus grand, il n'y a aucun investissement. Si c'est plus petit, il y a un nombre infini de firmes.

10. Puisque $\pi$ et $\eta$ sont constants, on doit en déduire que $r(t)$ est constant également à l'équilbre. En résolvant, l'équation, on trouve alors que $r = \pi/\eta$.

### 1.2.1 À l'équilibre

1. Des dérivations précédentes, on trouve :

$$\begin{aligned} Y &= AL^{1-\alpha} \int_0^N (X_j)^\alpha dj \\ &= AL^{1-\alpha} \int_0^N \underbrace{A^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2/(1-\alpha)} L}_{\text{dépend pas de } j} dj \\ &= \text{constante} \times NL \\ X &= NX_j = \text{constante} \times NL \end{aligned}$$

2. La contrainte budgétaire de l'économie est

$$\dot{N} = \frac{Y - X - C}{\eta}$$

on en déduit que

$$\eta \frac{\dot{N}}{N} = \frac{Y}{N} - \frac{X}{N} - \frac{C}{N}$$

Les deux premiers termes sont constants (voir point précédent).

3. Si on reprend la dérivation du côté consommateur de Ramsey (avec une utilité CIES), on trouve que $\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}(r - \rho)$. On sait que $r$ est constant et donc la consommation croit à un taux constant.
4. Ainsi, dans un sentier de croissance équilibré, on a que tout croît au même taux (et $C/N$ est constant).
5. Hypothèse implicite du modèle : $\pi/\eta > \rho$. Sinon, la valeur de la consommation future est trop faible par rapport à l'investissement possible (et donc, pas d'investissement pour consommation future). On peut le constater par l'équation d'Euler (point trois).
6. Remarque : le modèle actuel est toujours sur le sentier de croissance équilibré (il n'y a pas de transition). Ceci découle de la linéarité de $X$ et $Y$ en $N$.

### 1.2.2 Propriétés de l'équilibre

1. Le taux de croissance dépend positivement de $1/\theta$ et de $\rho$. Plus l'attrait du futur est grand, plus les gens sont prêts à investir. Il dépend positivement de $A$ (augmente $X$), négativement de $\eta$ et positivement de la taille de la population $L$ (effet de taille de marché).

2. Le sentier de croissance équilibré n'est pas Pareto-Optimal ($X_j < X_j^{gov}$). Il s'en suit que le rendement social des inventions est plus élevé que le rendement privé et donc, que le taux de croissance est plus faible dans une économie de marché que dans une économie planifiée. À l'évidence, il s'en suit que la production est également plus faible.
3. En terme de politique publique, cela promeut l'investissement en $R\&D$. Une subvention gouvernementale permet d'augmenter le niveau de $X$ et donc le bien-être. L'achat et la vente de biens intermédiaires corrige le niveau de croissance de manière adéquate. L'invessissement direct en $R\&D$ mène au bon taux de croissance d'innovations, mais pas nécessairement les bonnes quantités d'intermédiaires (toujours inefficient).

### 1.2.3 Quelques problèmes

1. Taille de marché : un problème. En réalité, la taille de la population croît et le niveau de PIB/Habitant ne croît pas. Le modèle implique pourtant que

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{1}{\eta} \frac{\text{dépenses en R\&D}}{N} = \text{constante} \times \frac{\text{dépenses en R\&D}}{Y/L}$$

   Or, $\frac{\text{dépenses en R\&D}}{Y/L}$ croît dans les pays industrialisés, mais pas $\dot{N}/N$ (Jones, 95).
2. Si la population croît au rythme $n$ (ce qu'on observe), il n'y a pas de sentier d'équilibre. Contredit les faits de croissance. C'est donc définitivement un problème.
3. Comment concilier le modèle ? On introduit des coûts croissants en fonction du nombre de variétés déjà existante $\eta = \phi N^{\sigma}$.

   $\sigma > 0$ signifie que c'est de plus en plus dur de développer de bonnes idées (toutes les bonnes idées sont trouvées en premier). Dans ce cas, la croissance chute à zéro dans le modèle.

   $\sigma < 0$ signifie que ça devient de plus en plus facile de développer de nouvelles idées une fois que des "grosses idées" ont été développées. Cela implique une croissance qui augmente à l'infini.

   Solution "rasoir" : $\sigma = 0$, ce qui donne un niveau de croissance constant.

### 1.2.4 Solution de Jones (95)

1. $n > 0$ et $\eta = \phi N^{\sigma}, \sigma > 0$.
2. Sentier de croissance équilibré avec taux de croissance $n/\sigma$ ! Conséquence, les investissements en $R\&D$ n'ont plus d'impact sur le taux de croissance, seulement sur les niveaux.

3. L'idée est plutôt intuitive, cependant. Plus il y a de gens, plus il y a de "génies" et donc d'idées innovantes. Kremer (93) trouve que la taille de la population est correllée avec le revenu.

# 2 Le modèles d'innovation des procédés

1. Modèle d'innovation des procédés : $N$ est fixe, mais les $X$ deviennent plus efficicaces. Souvent appelé "modèle Schumpeterien".

## 2.1 Hypothèses

1. Bien final
$$Y = AL^{1-\alpha} \int_0^N \tilde{X}_j^\alpha dj$$
où $\tilde{X}_j$ le bien intermédiaire $X_j$ ajusté pour les améliorations qualitatives.
2. À chaque période $t$, il y a $\kappa_j(t)$ versions du produit $j$. Chaque version diffère par le nombre d'unités qu'il produit. La version $k$ produit $q^k$ unités du bien intermédiaire $j$.
3. Chaque version $j, k$ est un monopole où la fonction de production demande une unité de bien final pour produire.
4. Dans ce contexte, il n'y a qu'un leader dans la production du bien $j$ : celui aillant le meilleur $\kappa_j(t)$ puisque les autres sont moins efficient.
5. La technologie de $R\&D$ est la suivante. Si $Z$ unités sont investies en $R\&D$ dans le secteur $j$, la probabilité de découvrir la version $\kappa_j + 1$ est de
$$p(\kappa_j) = \frac{1}{\xi} Z q^{-(\kappa_j+1)\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

## 2.2 Implications

1. Possible d'écrire l'output comme :
$$Y = \text{constante} \times QL$$
$$Q := \int_0^N q^{\kappa_j \frac{\alpha}{1-\alpha}} dj$$
2. Le sentier de croissance équilbré est similaire à celui du modèle précédent avec des effets similaires de $\theta, \rho, \xi$ et $L$. L'effet de $q$ est positif.

3. En termes de bien-être, le modèle à les problèmes similaires au modèle de variété (effet de sous-investissement). Il y a cependant un effet supplémentaire. La recherche en $R\&D$ est motivée uniquement par le "vol" de monopole. En conséquence, cet effet pousse l'investissement en $R\&D$ à la hausse.
4. Le dernier effet pourrait dominer (pas clair).

### 2.3 R&D du meneur

Dans le modèle précédent, le meneur ne fait aucune recherche. Mais il est possible de construire un équilibre où le meneur en fait (ou même fait tout) pour préserver son monopole et sa rente (décourager les autres d'entrer dans le jeux).

## 3 Innovation en taille et en qualité

1. Young (98) a combiné les deux modèles précédents. (croissance de $N$ et croissance de $Q$).
2. $\dot{Y}/Y$ est une moyenne de $\dot{N}/N$ et de $\dot{Q}/Q$.
3. Ce dernier suppose des coûts constants en innovation qualitative et des coûts croissants en expansion de variétés.
4. En résultat, il obtient une croissance en $Q$, mais pas en $N$ et une absence d'effets de taille de marché. Bref, la combinaison des deux élimine le problème du premier modèle.

## 4 Résumé

1. Avec des coûts constants de R&D, les margés grandissants mènent à une explosion de la croissance.
2. Les modèles de croissance étant affectés par des variables de politiques publiques on généralement des effets de taille de marché/pas de croissance de population et/ou des hypothèses "rasoirs" (razor-edge).
3. Les modèles sans ces hypothèses perdent souvent les implications en terme de variables de politiques publiques. Cependant, les variables de politiques publiques ont toujours des effets de niveau et si les transitions dynamiques prennent du temps, c'est similaire à la croissance observable.

# 5 Diffusion technologique

1. Objectif : expliquer les différences de taux de croissance entre pays pauvres et pays riches.
2. Idée fondamentale : les pays riches ont une croissance par innovation et les pays pauvres ont une croissance par imitation.

## 5.1 Les pays

1. Le pays 1 est le pays riche, 2 est le pays pauvre.
2. Comme dans le modèle d'innovation des variétés
$$Y_i = A_i L_i^{1-\alpha} \int_0^{N_i} X_{ij}^{\alpha} dj, i \in \{1,2\}, N_1 \geq N_2$$
Les taux de croissance seront $\gamma_i$.
3. Les produits initiaux du pays pauvre est un sous-ensemble des produits initiaux des produit du pays riche.
4. Coût d'innovation dans le pays pauvre $\eta_2$ (possiblement différente de $\eta_1$).
5. Imitation dans le pays pauvre : coût d'imitation de $v_2$ (le coût d'imitation est ce qui génère la transition dans le modèle). C'est une fonction : $v_2(\frac{N_1}{N_2}), v_2' > 0$ telle qu'il est initialement moins cher d'imiter $v_2(\frac{N_1(0)}{N_2(0)}) < \eta_2$.
6. Pas d'échange entre les deux pays, notamment en terme de capital (les taux seront possiblement différents dans les deux pays)
7. $\rho$ et $\theta$ identique dans les deux pays (même préférences de consommation).
8. Tout le reste est identique au modèle de Romer.

## 5.2 Résultats

1. Revenus relatifs :
$$\frac{y_1}{y_2} = \text{ constante} \times \frac{N_2}{N_1}$$
2. Si $v_2(\frac{N_1(0)}{N_2(0)})$ est très bas, $N_2$ croîtra rapidement (initialement).
3. Si on définit $v_2^*$ tel que $\frac{\pi_1}{\eta_1} = \frac{\pi_2}{v_2^*}$, qu'on suppose $v_2^* < v_2(1)$ (pente élevée) et $v_2^* < \eta_2$, alors on a que $\gamma_1 = \gamma_2$ et $N_2/N_1 < 1$.