

Théorie du choix social

Pier-André Bouchard St-Amant

26 mars 2009

1 Théorie du choix social

1.1 Définitions

Définition 1 (Espace des préférences). *Soit X un ensemble de paniers d'alternatives. Nous noterons \mathfrak{R} l'ensemble des relations de préférences possibles sur ces paniers.*

Définition 2 (Fonction de préférences sociales). *Soit I individus aillant chacun une relation de préférence $\succ_i \in \mathfrak{R}$ transitive et complète sur un ensemble X . Une fonction d'utilité sociale (FPS) $F(\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_I) : \mathfrak{R}^I \rightarrow \mathfrak{R}$ est une relation de préférence transitive et complète agrégeant les préférences de la société sur X . Pour dire que la société préfère x à y , on notera $x F(\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_I) y$.*

Définition 3 (Propriété de Pareto). *Une FPS possède la propriété de Pareto si $\forall x, y \in X$ et $\forall (\succ_1, \dots, \succ_I) \in \mathfrak{R}^I$, $x \succ_i y \forall i \Rightarrow x F y = x \succ y$.*

Avec la propriété de Pareto, si tout le monde préfère a , la société préférera a également.

Définition 4 (Propriété de symétrie). *Soit $P(\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_I)$ une permutation sur les arguments de la FPS. Alors, la FPS est dite symétrique si $x F(P(\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_I)) y \Leftrightarrow x F(\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_I) y \forall x, y, P$.*

Une FPS symétrique n'accorde pas d'importance à l'ordre des individus, où à leur identité.

Définition 5 (Indépendance des alternatives non-pertinentes¹). *Une FPS est indépendante des alternatives non-pertinentes (IANP) si $x F(\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_I) y = x F(\succ'_1, \succ'_2, \dots, \succ'_I) y$ pour toute paire de profils de préférences $(\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_I), (\succ'_1, \succ'_2, \dots, \succ'_I)$ tels que $x \succ_i y \Leftrightarrow x \succ'_i y$ et $x \prec_i y \Leftrightarrow x \prec'_i y$.*

Dans le cas où X ne contient que deux alternatives, cela implique que si inverse les préférences de tout le monde, on aura le choix de société opposé.

¹Independence of Irrelevant Alternatives

Définition 6 (Propriété de réponse positive). *Supposons que X ne contient que deux alternatives a, b . Soit \succ_1, \dots, \succ_I un profil de préférences tel que k est le nombre d'individus $a \succ_i b$. Soit un autre profil de préférences $\succ'_1, \dots, \succ'_I$ tel que $k + m$ ($m > 0$) est le nombre d'individus tel que $a \succ_i b$.*

Une FPS répond positivement si $b \not F(\succ_1, \dots, \succ_I)a \Rightarrow a F(\succ'_1, \dots, \succ'_I)b \forall m$.

Dans le premier profil la société préfère a ou est indifférente. Si les préférences changent et plus de monde deviennent en faveur de a , alors la société devient en faveur de a .

Définition 7 (Propriété dictatoriale). *Une FPS est dictatoriale s'il existe un individu r tel que $\forall x, y \in X$ et pour tout profil de préférence $(\succ_1, \dots, \succ_I)$, $x F y \Leftrightarrow x \succ_r y$.*

Pour qu'une FPS ait la propriété de réponse positive, il est nécessaire (mais non suffisant) qu'elle soit non-dictatoriale.

1.1.1 Exemples de fonction de préférences sociales

Définition 8 (FPS majoritaire). *Supposons que X ne contient que deux alternatives a, b . Soit la fonction d'utilité des individus*

$$u_i := \begin{cases} 1 & \text{si } a \succ b \\ 0 & \text{si } a \sim b \\ -1 & \text{si } a \prec b \end{cases}$$

Alors la FPS majoritaire est la suivante :

$$a F_m b := \begin{cases} a \succ b & \text{si } \sum_i u_i > 0 \\ a \sim b & \text{si } \sum_i u_i = 0 \\ a \prec b & \text{si } \sum_i u_i < 0 \end{cases}$$

Définition 9 (FPS dictatoriale). *Supposons que X ne contient que deux alternatives a, b et soit les fonctions d'utilité telles que définies précédemment. Alors la FPS dictatoriale est la fonction d'utilité d'un seul individu (disons r) :*

$$a F_d b := \begin{cases} a \succ b & \text{si } u_r > 0 \\ a \sim b & \text{si } u_r = 0 \\ a \prec b & \text{si } u_r < 0 \end{cases}$$

Définition 10 (FPS de Borda). *Supposons que X soit dénombrable. Définissons $b_i(x) := |\{y : y \succ x\}| + \frac{1}{2}|\{z : z \sim x\}| + 1$ (le nombre d'alternatives préférées à x additionné de la moitié du nombre d'alternatives indifférentes à x , additionné de 1). Alors la FPS de borda est définie de la manière suivante :*

$$x F_b y := \begin{cases} x \succ y & \text{si } \sum_i b_i(x) - b_i(y) > 0 \\ x \sim y & \text{si } \sum_i b_i(x) - b_i(y) = 0 \\ x \prec y & \text{si } \sum_i b_i(x) - b_i(y) < 0 \end{cases}$$

1.2 Théorèmes de May et d'Arrow

Théorème 1 (Théorème de May). *Supposons que X ne contient que deux alternatives a, b . Alors seule la FPS majoritaire possède les propriétés de Pareto, de symétrie, d'indépendance des alternatives non-pertinentes et de réponse positive.*

Démonstration. Dit autrement, une FPS possède ces quatre propriétés si et seulement si c'est la FPS majoritaire. Notons les préférences individuelles par les fonctions d'utilité définies dans la définition 8.

(Si) :

1. Pareto : Clairement, si tout le monde préfère a , $\sum_i u_i = I > 0$ et donc $aF_m b = a \succ b$. Inversement, si tout le monde préfère b , nous aurons $bF_m a = b \succ a$.
2. Symétrie : Trivialement, une permutation sur l'ordre des préférences n'affecte pas la somme (par la commutativité de l'addition).
3. Neutralité : Si la somme des utilités est positive, l'inversion des préférences rendra la somme des utilités négative et nous aurons le résultat inverse.
4. Réponse positive : si le nombre de votes est non-négatif, l'ajout d'un vote (ou plus) en faveur de a rendra nécessairement la somme positive.

(Seulement si) : Soit une FPS F qui répond aux quatre critères. Il faut montrer qu'elle est alors la FPS majoritaire.

1. Par la propriété de symétrie, la FPS ne peut que dépendre du nombre de personnes qui préfèrent a ($\#a$) et du nombre qui préfèrent ($\#b$). Nous avons donc $F := G(\#a, \#b)$.
2. Supposons que $\#a = \#b$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 aG(\#a, \#b)b &= aG(\#b, \#a)b && \text{(par égalité)} \\
 \Rightarrow aF(\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_I)b &= aF(\prec_1, \prec_2, \dots, \prec_I)b && \text{(par définition)} \\
 \Rightarrow aF(\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_I)b &= bF(\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_I)a && \text{(par neutralité)} \\
 \Leftrightarrow aF(\succ_1, \succ_2, \dots, \succ_I)b &= a \sim b
 \end{aligned}$$

Donc $\#a = \#b \Rightarrow a \sim b$

3. Supposons maintenant que $\#a > \#b$. Nous savons par le point précédent que si $\#a = \#b \Rightarrow a \sim b$. Par la propriété de réponse positive, on déduit alors que $\#a > \#b \Rightarrow a \succ b$. Similairement, $\#a < \#b \Rightarrow a \prec b$.
4. Bref, on a que F doit satisfaire :

$$F := \begin{cases} a \succ b & \text{si } \#a > \#b \\ a \sim b & \text{si } \#a = \#b \\ a \prec b & \text{si } \#a < \#b \end{cases}$$

Ce qui est exactement la définition de la FPS majoritaire.

□

Dans un référendum à deux alternatives, les préférences de la société pour un choix sont révélées. Malheureusement, c'est le plus loin qu'on peut aller sans faire de jugement de valeurs.

Définition 11 (Ensemble décisif pour x sur y). *Étant donné F une FPS et $S \subset I$. On dit que S est décisif pour x sur y si $x \succ_i y \forall i \in S, x \not\succeq_i y \forall i \in I \setminus S \Rightarrow xFy = x \succ y$.*

Définition 12 (Ensemble décisif). *Un ensemble S est décisif s'il est décisif pour x sur y pour toute paire $x, y \in X$.*

Définition 13 (Ensemble complètement décisif pour x sur y). *Étant donné F une FPS et $S \subset I$. On dit que S est complètement décisif pour x sur y si $x \succ_i y \forall i \in S \Rightarrow xFy = x \succ y$.*

Définition 14 (Ensemble complètement décisif). *Un ensemble est complètement décisif s'il est complètement décisif pour toute paire $x, y \in X$.*

Théorème 2 (Théorème d'Arrow). *Supposons que X contient plus de deux éléments. Alors, toute FPS qui satisfait les propriétés de Pareto et d'indépendance d'alternatives non-pertinentes est forcément dictatoriale.*

En d'autres termes, il n'existe aucune FPS qui répond simultanément aux propriétés de Pareto, d'indépendance d'alternatives non-pertinentes et de réponse positive.

Pour prouver ce théorème, nous allons d'abord démontrer plusieurs lemmes dits "de contagion", sous les hypothèses du théorème.

L'idée clé de chaque preuve est que puisque la FPS est indépendante des profils de préférences, on peut prendre le profil le plus simple pour chaque question. Par l'indépendance des alternatives non-pertinentes, on peut ainsi considérer que des profils de préférences à trois alternatives seulement.

Lemme 1. *Soit $x, y, z \in X$ et F une FPS. Si S est décisif pour x sur y , alors S est aussi décisif pour x sur tout $z \neq x$. Similairement, S est décisif pour z sur y .*

Démonstration.

1. Soit le profil suivant :

$$\begin{array}{ll} x \succ_i y \succ_i z & \forall i \in S \\ y \succ_i z \succ_i x & \forall i \in I \setminus S \end{array}$$

2. Puisque S est décisif, on a que $xFy = x \succ y$.
3. Puisque F satisfait la propriété de Pareto et que $y \succ_i z \forall i$, on a que $yFz = y \succ z$.

4. Par la transitivité de F , on a que $xFz = x \succ z$.
5. Par l'IANP de F , on a alors que $\forall i \in S : x \succ_i z$ et $z \succ_i x \forall i \notin S \Rightarrow xFz = x \succ z$.

□

Lemme 2. *Soit w, x, y, z des éléments distincts de X . Si S est décisif pour x sur y , S est aussi décisif pour z sur w .*

Démonstration. Par le lemme précédent, S est décisif pour x sur z et z sur y . En appliquant à nouveau le lemme précédent à la paire x, z sur w , on a le résultat voulu. □

Lemme 3. *Soit $x, y \in X$. Si S est décisif pour x sur y , alors il est décisif.*

Démonstration. Par itération du lemme précédent $\forall w \in X$. □

Lemme 4. *Si S et T sont décisifs, alors $S \cap T$ est également décisif.*

Démonstration. Soit $x, y, z \in X$ trois alternatives distinctes et considérons le profil de préférences suivant :

$$\begin{aligned} z \succ_i y \succ_i x \quad \forall i \in S \setminus (S \cap T) \\ x \succ_i z \succ_i y \quad \forall i \in S \cap T \\ y \succ_i x \succ_i z \quad \forall i \in T \setminus (S \cap T) \\ y \succ_i z \succ_i x \quad \forall i \in I \setminus (S \cap T) \end{aligned}$$

1. $zFy = z \succ y$ puisque $S = [S \setminus (S \cap T)] \cup (S \cap T)$ est décisif. Similairement, $xFz = x \succ y$ puisque T est décisif.
2. Puisque les préférences sont transitives, on a alors $xFy = x \succ y$.
3. Par l'IANP, la préférence sociale de x sur y ne dépend pas de z .
4. On a alors que $x \succ_i y \quad \forall i \in S \cap T$ et le contraire dans les autres ensemble. Il s'en suit que $S \cap T$ est décisif.

□

Lemme 5. *Pour tout ensemble S , soit S est décisif, soit $I \setminus S$ est décisif.*

Démonstration. Soit $x, y, z \in X$ trois alternatives distinctes et considérons le profil de préférences suivant :

$$\begin{aligned} x \succ_i z \succ_i y \quad \forall i \in S \\ y \succ_i x \succ_i z \quad \forall i \in I \setminus S \end{aligned}$$

Il n'y a que deux possibilités. Soit $xFy = x \succ y$. Dans ce cas, par l'IANP, on a que S est décisif pour x sur y . Par le lemme, S est alors décisif.

Soit $yFx = y \succ x$. Par l'IANP, on a que alors que $I \setminus S$ est décisif pour y sur x et par le lemme trois, décisif. □

Lemme 6. \emptyset n'est pas décisif.

Démonstration. Si tout le monde préfère x sur y , par la propriété de pareto, la FPS sera telle que $x \succ y$. En conséquence, l'ensemble vide ne peut être décisif. \square

Corrolaire 1. I est décisif.

Démonstration. Découle des deux derniers lemmes. \square

Lemme 7. Si S est décisif, alors $T \supset S$ est également décisif.

Démonstration. Considérons $I \setminus T$. On a que $S \cap (I \setminus T) = \emptyset$. Puis que S est décisif, $I \setminus T$ ne peut être décisif car sinon, \emptyset serait décisif (par le lemme 4). En conséquence T doit être décisif par le lemme 5. \square

Lemme 8. Si S est décisif et de cardinalité supérieure à un, il existe un $S' \subset S$ tel que S' est décisif.

Démonstration. Considérons l'ensemble $S \setminus \{r\} \subset S$ et supposons qu'il n'est pas décisif (autrement, c'est la fin de la preuve). On a alors que $I \setminus (S \setminus \{r\}) = (I \setminus S) \cup \{r\}$ (par le lemme 5). On a alors que $\{r\} = S \cap [I \setminus S \cup \{h\}]$ est décisif (par le lemme 4). \square

Lemme 9. Il existe in agent $r \in I$ tel que $S = \{r\}$ est décisif.

Démonstration. I est décisif et de taille finie. On trouve alors r par itération du lemme précédent sur I . \square

Lemme 10. Si S est décisif, alors il est complètement décisif.

Démonstration. Soit $x, y, z \in X$ trois alternatives distinctes et considérons le profil de préférences suivant :

$$\begin{aligned} x \succ_i z \succ_i y \quad \forall i \in S \\ x \succ_i y \succ_i z \quad \forall i \in T \\ y \succ_i z \succ_i x \quad \forall i \in I \setminus (S \cup T) \end{aligned}$$

1. S est décisif pour z sur y et donc, décisif.
2. Par le lemme 7, $S \cup T$ est décisif.
3. En conséquence $x F z = x \succ z$.
4. Par transitivité de F , on a que $x F y = x \succ y$.
5. On en déduit que S est complètement décisif.

\square

On peut maintenant prouver le théorème d'Arrow :

Démonstration du théorème d'Arrow. Par le lemme 9, il existe un dictateur. Par le lemme 10, ce dernier dicte pour toutes les paires x, y et ce, peu importe les préférences des autres. \square